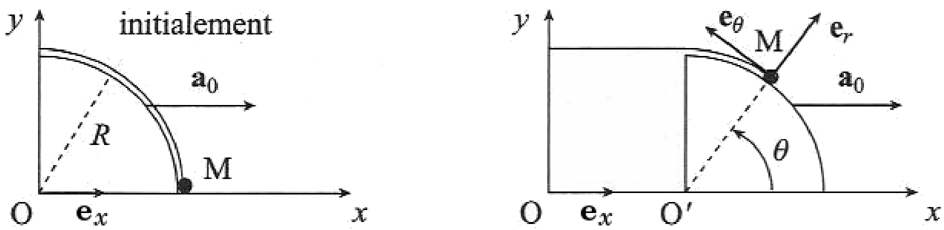
MECANIQUE

Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

I. Mouvement d'une masse glissant sur un cylindre

Un quart de cylindre de rayon R et de centre O', initialement immobile contre le mur Oy, se déplace avec une accélération constante par rapport au sol : $\vec{a}_0 = a_0\,\vec{e}_x$ (cf figure ci-dessous, où les vecteurs sont représentés en gras).



Un fil inextensible repose en partie sur le cylindre, une extrémité étant fixée au mur et l'autre extrémité reliée à un point matériel M. M est initialement en contact avec le sol. On suppose tout d'abord qu'au cours du mouvement, le point M ne décolle pas du cylindre. On étudie le mouvement dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1. Etablir la loi horaire du vecteur position de l'axe du cylindre $\overrightarrow{OO'}(t)$.
2. En déduire la la loi horaire $\theta(t)$.
3. Exprimer les coordonnées cartésiennes x et y de M en fonction de θ.
4. Tracer qualitativement, en la justifiant, la trajectoire de M dans le repère Oxy tant qu'il est en contact avec le cylindre (c'est-à-dire pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$). On indiquera clairement les coordonnées du point de départ et du point "d'arrivée", et on justifiera la direction de la tangente à la trajectoire en ces deux points.

On cherche maintenant à déterminer à quelle condition le point M atteint effectivement $\theta = \frac{\pi}{2}$ sans décoller avant du cylindre. On supposera que le mobile M est de masse m, et qu'il glisse sans frottement sur le cylindre. On note $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$ le champ de pesanteur terrestre. On considère $\mathcal{R}$ galiléen.

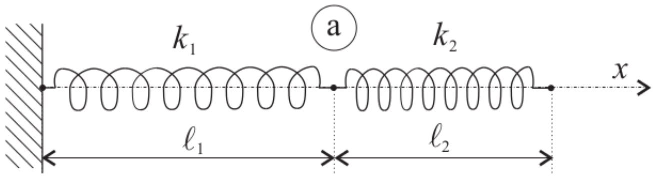
5. Faire le bilan des forces s'exerçant sur M. Décomposer ces forces sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (base polaire dans le repère $O'xy$).
6. Exprimer la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. En déduire l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ de M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Pour simplifier le calcul, on pourra exprimer $\vec{a}$ directement en fonction de θ et ses dérivées $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ plutôt qu'explicitement en fonction du temps.
   En utilisant l'expression de $\theta(t)$, montrer que son expression se réduit simplement à
   $$\vec{a} = a_0(\cos\theta - 2\theta)\,\vec{e}_r + a_0(1 - \sin\theta)\,\vec{e}_\theta\,.$$
7. Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) et le projeter sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. En déduire l'expression des forces exercées par le cylindre et par le fil en fonction de θ.
8. Ecrire la condition de décollement du cylindre. Montrer que M ne décolle pas avant $\theta = \frac{\pi}{2}$ si le rapport $\frac{g}{a_0}$ vérifie une condition qu'on explicitera.

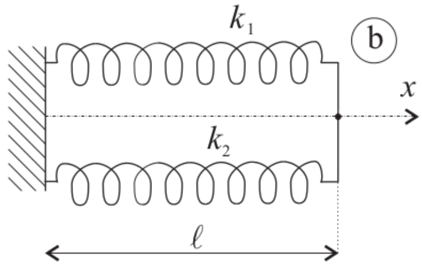
II. La toile de l'araignée

Au cours d'une promenade dans un jardin, un physicien s'arrête en admiration devant une toile d'araignée. Les fils en sont-ils aussi solides qu'on le dit ? La première partie se propose de répondre à cette question. La seconde modélise le mouvement d'un insecte prisonnier d'une toile.

1. Modélisation d'un fil élastique

1. On considère d'abord un ressort élastique, régi par la loi de Hooke, dont on note k la *raideur* et ℓ_0 la *longueur à vide*. On appelle *souplesse* du ressort la grandeur $1/k$. Quelle est la force exercée par ce ressort sur son extrémité lorsqu'il acquiert la longueur ℓ ? On précisera le sens de cette force sur un schéma.
2. On associe en série deux ressorts élastiques (cf. figure a) ci-dessous), alignés, de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide $\ell_{0\,1}$ et $\ell_{0\,2}$, formant un système élastique unique de longueur totale $\ell = \ell_1 + \ell_2$. Montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort élastique unique de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k, et donner les expressions de ℓ_0 et k en fonction de $\ell_{0\,1}$, $\ell_{0\,2}$, k_1 et k_2. Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

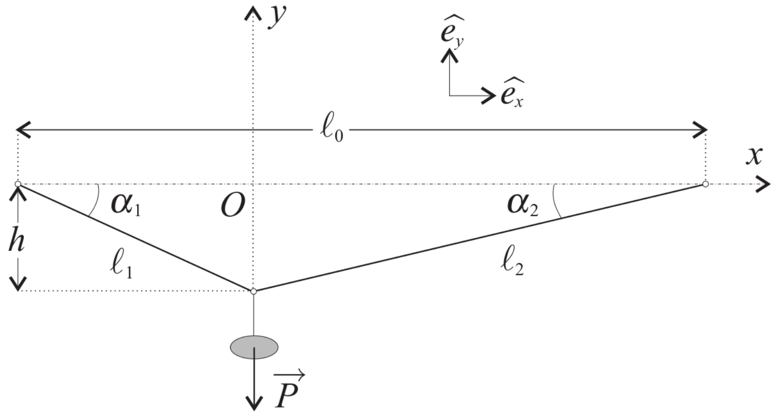




3. On associe maintenant en parallèle les deux ressorts élastiques de la question précédente (cf. figure b) ci-dessus), formant un système élastique unique de longueur $\ell = \ell_1 = \ell_2$. Déterminer la raideur k et la longueur à vide ℓ_0 du ressort élastique unique équivalent à cette association ; Commenter sa souplesse.
4. En vous appuyant sur les résultats des deux questions précédentes, expliquez pourquoi la force exercée sur une de ses extrémités par un fil élastique de longueur ℓ_0, de section s, peut aussi être décrite par une loi de Hooke de constante de raideur vérifiant
$$k = \frac{Es}{\ell_0}\,,$$
où la constante E, appelée module d'Young du fil, est caractéristique du matériau dont le fil est constitué. On prendra soin notamment d'expliquer pourquoi k est proportionnel à s et inversement proportionnel à ℓ_0.

Pour mesurer le module d'Young d'un fil d'araignée, le physicien procède à l'expérience suivante. Il prélève sur une toile un fil d'araignée cylindrique, de rayon r_0, de section constante $s = \pi r_0^2$, de longueur à vide ℓ_0, et il le fixe en deux points fixes situés sur une même horizontale, distants de ℓ_0. Il attache alors, en un point du fil, un hameçon muni d'un ou plusieurs plombs de pêche. La norme du poids de l'ensemble est notée P (cf. figure ci-dessous).

Le fil élastique se tend et prend à l'équilibre une forme en V, les deux segments du fil, de longueurs l_1 et l_2, formant avec l'horizontale les angles α_1 et α_2 positifs et dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut aussi noter h la flèche du fil, c'est-à-dire la hauteur du point d'attache de l'hameçon sous l'horizontale, à l'équilibre.



5. En appliquant un principe dynamique à un système qu'on définira avec soin, établir les expressions des normes des forces exercées par les deux brins de fil à l'équilibre, en fonction de P, α_1 et α_2. On notera respectivement F_1 et F_2 les normes des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercées respectivement par les fils de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 sur le point d'attache de l'hameçon.
6. Etablir les expressions de $\cos\alpha_1$ et $\cos\alpha_2$ en fonction de ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2.
7. On suppose que la section s du fil reste constante pendant l'étirement et que les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ peuvent être modélisées par la loi de Hooke décrite à la question 4. On pose $x = (Es)^{-1}$. Montrer que x vérifie l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{, avec}$$
$$a = F_1F_2 \quad , \quad b = F_1\left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_0}\right) + F_2\left(1 - \frac{\ell_1}{\ell_0}\right) \quad \text{et} \quad c = 1 - \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_0}\,.$$

Pour chaque mesure, on note, en fonction du nombre n de plombs de pêche attachés à l'hameçon, les valeurs de P, ℓ_1 et ℓ_2 (mesurés), de α_1 et α_2 (calculés comme à la question 6.), de F_1 et F_2 (calculés comme à la question 5.) avant d'en déduire la valeur de Es (en résolvant l'équation du second degré proposée à la question 7.). Le tableau proposé ci-après correspond à $\ell_0 = 3,52\,\text{cm}$.

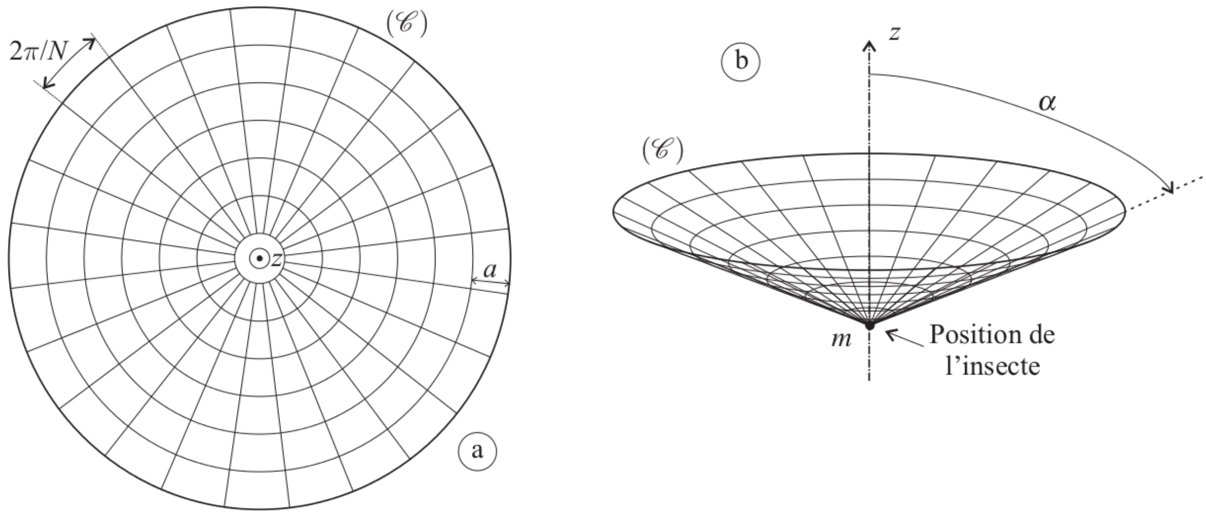
n	P (mN)	ℓ_1 (cm)	ℓ_2 (cm)	α_1 (°)	α_2 (°)	F_1 (mN)	F_2 (mN)	Es (mN)
1	0,711	1,84	1,79	13,9	14,3	1,45	1,46	46,6
3	2,07	1,68	2,01	19,2	15,9	3,46	3,40	71,1
4	2,74	1,45	2,30					
5	3,42	1,56	2,24	26,8	18,3	4,59	4,31	55,7
6	4,10	1,62	2,24	28,8	20,4	5,08	4,75	50,6
7	4,77	2,32	1,56	20,1	30,7	5,29	5,78	53,7

8. Expliciter la solution x en fonction de a, b et c. Calculer les valeurs manquantes du tableau (ne pas répondre sur l'énoncé).
9. Quelle est la dimension de E ? Quelle est son unité ?
Le rayon du fil utilisé est mesuré au microscope : $r_0 = 5,00 \pm 0,25\,\mu\text{m}$. En déduire une estimation du module d'Young du fil. Calculer la précision de cette estimation (l'incertitude relative), et conclure.
On rappelle que pour une série de N mesures $\mathbf{m}_i$, l'évaluation correcte (sans biais) de l'écart-type se fait via la relation
$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{m_i} - \overline{\mathbf{m}})^2}\,.$$

* * * Tourner SVP * * *

2. Oscillations de la toile complète

On étudie maintenant la toile complète, qui sera, dans la situation de repos, modélisée comme une structure circulaire horizontale comportant des fils radiaux disposés aux angles $\theta_k = \frac{2k\pi}{N}$, avec $k = 0$, 1, 2, …, $N-1$. Le nombre de rayons de la toile est donc N. Ces fils sont tramés avec des fils circulaires disposés régulièrement aux rayons $r_p = p\,a$ où $p = 0$, 1, 2, …, le tout est représenté sur la figure ci-dessous (a). Le bord circulaire $(\mathcal{C})$ de la toile est horizontal, rigidement fixé à la végétation, de rayon $R = 20\,\text{cm}$.



On ne s'intéresse qu'aux oscillations de la toile respectant la symétrie de révolution. Les fils de la toile sont tous au repos lorsque la toile est plane (cf figure a). Un insecte, pris au piège au centre de la toile, provoque la déformation de la toile. On suppose alors qu'à l'instant t elle forme un cône d'axe vertical (Oz) et d'angle au sommet α (cf figure b). On notera m la masse de l'insecte fixé au centre de la toile (donc au sommet du cône) et on négligera la masse des fils de la toile.

10. Au cours du mouvement, comment évolue la longueur des fils circulaires (de longueur au repos $\ell_{0,c} = 2\pi r_p$) ? Même question pour les N fils radiaux (de longueur au repos égale au rayon de la toile : $\ell_{0,r} = R$).

Chacun des fils de la toile, s'il est de longueur ℓ_0 au repos, exerce sur chacune de ses extrémités, lorsqu'il est étiré à la longueur ℓ, une force de rappel de norme $F = k(\ell - \ell_0)$ où $k = Es/\ell_0$ dépend de la section constante s du fil et de son module d'Young E.

11. Montrer que la position z de l'insecte sur la toile vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + g = \frac{NEs}{m}\, f(\alpha)$$

où on précisera la fonction $f(\alpha)$.

On étudie les petits mouvements de l'insecte autour de sa position d'équilibre, repérée par $\alpha = \alpha_0$. Cela conduit à l'équation différentielle approchée suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g}{R}\, h(\alpha_0)\,(\alpha - \alpha_0) \quad \text{avec} \quad h(\alpha) = \sin^2(\alpha)\,\frac{\mathrm{d}\ln|f(\alpha)|}{\mathrm{d}\alpha}\,.$$

12. Quelle équation permet de déterminer α_0 ?
Par exemple, pour $\alpha_0 = 45°$, on obtient $h(\alpha_0) = -2,21$. Que peut-on en conclure sur la nature du mouvement ? Exprimer et calculer la période des petites oscillations (on prendra $g = 9,8\,\text{m.s}^{-1}$). Dépend-elle de la masse de l'insecte ?

* * * Fin de l'épreuve * * *