

# SIGNAUX

Les deux problèmes sont totalement indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, mais sur des copies séparées.

## CALCULATRICES AUTORISÉES

### Formulaire :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$
- Pour  $|\varepsilon| \ll 1$ , on peut approximer au premier ordre en  $\varepsilon$  :  $\cos \varepsilon \approx 1$  et  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ .

## I. Modulation d'amplitude et de phase

### I.1. Modulation d'amplitude

#### a. Fabrication du signal modulé

Le montage de la Fig. 1 représente schématiquement un modulateur d'amplitude : il comprend un multiplieur, qui délivre une tension de sortie  $v_{s1} = k \times u_1 \times u_2$  ( $k$  étant une constante) et un sommateur qui délivre en sortie une tension  $v_s$ , égale à la somme des tensions d'entrée.

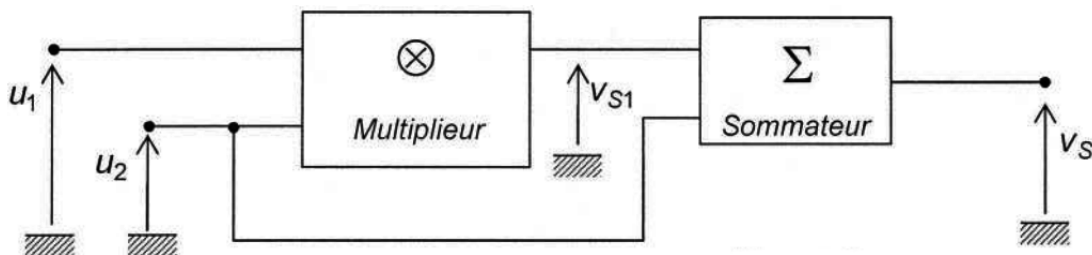


FIGURE 1 – Modulation d'amplitude

Les tensions sont sinusoïdales :  $u_1(t) = U_m \cos(\omega_m t)$  et  $u_2(t) = U_0 \cos(\omega_p t)$ , avec  $\omega_p \gg \omega_m$ . Le signal  $u_1(t)$  est appelé *signal modulant* et le signal  $u_2(t)$  *signal de porteuse*.

1. Montrer que la tension de sortie  $v_s(t)$  peut s'écrire sous la forme

$$v_s(t) = U_0 \cos(\omega_p t) [1 + m \cos(\omega_m t)]$$

et déterminer  $m$  en fonction de  $k$  et de  $U_m$ .

Dans toute la suite, on considère que  $m < 1$ .

2. Représenter graphiquement, de façon schématique, la tension  $v_s(t)$ .
3. Représenter, en le justifiant, le spectre du signal  $v_s(t)$  (indiquer la hauteur des pics).

#### b. Extraction du signal modulant par démodulation synchrone

Le signal  $v_s(t)$  est émis par une antenne et réceptionné par une autre, ce qui produit un signal  $e(t) = k' v_s(t)$  au niveau du récepteur, où  $k'$  est une constante sans importance ici qu'on pourra prendre égale à 1 sans perte de généralité. On souhaite alors extraire l'information contenue dans le signal modulant par la méthode de *démodulation synchrone*. Pour ce faire, on multiplie  $e(t)$  par un signal de même pulsation et même phase que le signal de porteuse :  $v_2(t) = V_0 \cos(\omega_p t)$ . Puis on filtre le signal  $v_{s2}(t)$  obtenu. Le tout est résumé dans la Fig. 2.

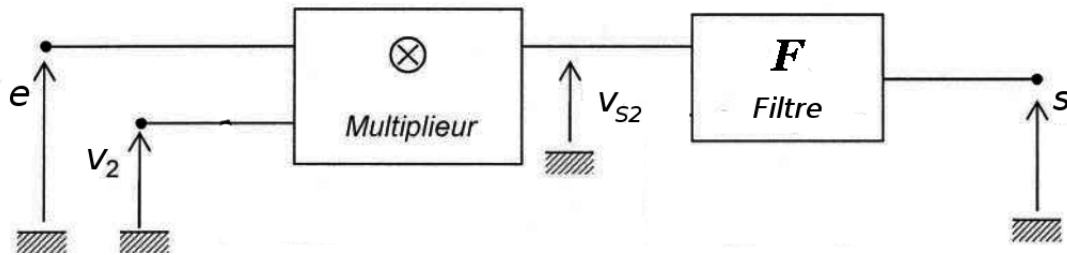


FIGURE 2 – Principe de la démodulation synchrone.

4. Représenter, en le justifiant, le spectre du signal  $v_{s2}(t)$  (indiquer la hauteur des pics).

On se place dans le cas où le signal modulant est issu d'un signal sonore du domaine audible (ex : voix humaine, musique...). Sa fréquence  $f_m$  est donc contenue dans la bande de fréquences [20 Hz, 20 kHz]. Les aigües étant mal restitués en sortie, on cherchera seulement à restituer la bande [20 Hz, 6 kHz]. Comme cette bande s'étend particulièrement bas en fréquence, on procède au filtrage en deux étapes : le filtre  $\mathcal{F}$  est en fait une succession de deux filtres  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ , le premier éliminant les hautes fréquences et le second les basses.

#### 5. Conception du filtre $\mathcal{F}_1$

- a) Proposer un montage à base des composants  $R$ ,  $L$  et  $C$  disposés en série, pour réaliser le filtre  $\mathcal{F}_1$ , de telle sorte qu'il soit du second ordre (ce que l'on vérifie à la question suivante). On indiquera bien la tension d'entrée et celle de sortie.  
Justifier la fonction du filtre en étudiant les comportements asymptotiques du circuit à basse et haute fréquence.
- b) Montrer que sa fonction de transfert  $\underline{H}_1 = \frac{s_1}{v_{s2}}$  en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$  peut se mettre sous la forme canonique

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

où  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  est la pulsation réduite. On établira les expressions de sa pulsation propre  $\omega_0$  et de son facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

- c) Montrer par les calculs nécessaires qu'il est judicieux de choisir une valeur de  $Q$  inférieure à une certaine valeur  $Q_m$  qu'on déterminera.  
Pourquoi est-il optimal de choisir  $Q = Q_m$ ?  
*Dans la suite on choisira pour  $Q$  cette valeur.*
- d) Que vaut alors la fréquence de coupure  $f_{c1}$  du filtre  $\mathcal{F}_1$  en fonction des paramètres?
- e) Dédire des questions précédentes les valeurs à choisir pour  $R$  et  $C$  afin que le filtre  $\mathcal{F}_1$  remplisse sa fonction, sachant que la bobine dont on dispose a pour inductance  $L = 0,1$  H.
- f) Etablir la forme asymptotique du diagramme de Bode en gain du filtre  $\mathcal{F}_1$ . La représenter sur le document annexe "Electronique". On prendra en abscisse la fréquence réduite  $x = \frac{f}{f_{c1}}$ .

#### 6. Conception du filtre $\mathcal{F}_2$

- a) Proposer un montage simple à base des composants  $R$ , et  $C$  pour réaliser le filtre  $\mathcal{F}_2$ , de telle sorte qu'il soit d'ordre 1. Justifier la nature du filtre par les comportements asymptotiques du circuit.
- b) Etablir sa fonction de transfert en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . Que vaut sa fréquence de coupure  $f_{c2}$ ?
- c) Proposer une valeur pour  $C$  afin que le filtre  $\mathcal{F}_2$  remplisse sa fonction, sachant que  $R = 100$  k $\Omega$ .
- d) Etablir la forme asymptotique du diagramme de Bode en gain du filtre  $\mathcal{F}_2$ . La représenter sur le document annexe "Electronique" en gardant la même variable en abscisse, c'est-à-dire la fréquence réduite  $x = \frac{f}{f_{c1}}$ . On prendra soin de différencier la couleur et légèrer les courbes.

## 7. Mise en cascade des deux filtres

- a) Est-il judicieux de mettre les filtres  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  directement en cascade? Pourquoi? Quelle solution peut-on envisager?

*On supposera ces précautions prises pour les questions suivantes.*

- b) Expliquer comment on peut alors obtenir le diagramme de Bode du filtre complet  $\mathcal{F}$  à partir des diagrammes de Bode des deux filtres  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Représenter alors cette construction pour le diagramme de Bode asymptotique du filtre complet sur le document annexe "Electronique" (à l'aide d'une 3ème couleur).

### c. Application

On considère maintenant l'exemple de la transmission AM d'un signal radio émis par *France Inter*. Le signal de la porteuse correspondant est de fréquence  $f_p = 162$  kHz. On considèrera ici l'émission d'un signal modulant sinusoïdal de fréquence  $f_m = 1$  kHz. On suppose, pour les applications numériques, que :

- les deux signaux ne sont pas déphasés;
- leur amplitude est identique et vaut  $U_m = U_0 = 0,5$  V;
- on choisit  $k = 1$  V<sup>-1</sup>,  $k' = 1$  et  $V_0 = 1$  V.

Le signal modulé obtenu au moyen du montage de la partie 1.1 est envoyé sur la chaîne de démodulation étudiée dans la partie 1.2. On notera  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  le gain total et la phase totale de la fonction de transfert du filtre  $\mathcal{F}$ .

8. a) Donner l'expression littérale exacte du signal de sortie  $s(t)$ , en fonction de  $U_0, m, k, k'$ , des pulsations  $\omega_p$  et  $\omega_m$ , de  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  et du temps  $t$ .
- b) Calculer  $G(\omega)$  explicitement et en déduire numériquement l'amplitude de chaque composante spectrale du signal de sortie.
- c) Déduire des applications numériques précédentes l'expression approchée du signal de sortie (en précisant à quel niveau de précision). On oubliera pas de justifier la valeur approchée des déphasages.

## 1.2. Modulation de phase

### a. Principe de la modulation

Pour certaines applications, il est souhaitable de moduler la phase du signal de porteuse, pour obtenir une tension de la forme  $v_s(t) = U_0 \cos[\omega_p t + m \cos(\omega_m t)]$ . Une approche, imaginée par l'inventeur E. Armstrong en 1933, permet très simplement d'obtenir un signal de ce type (pour les faibles modulations) en modifiant légèrement le montage de la Fig. 1.

*Dans toute la suite, le taux de modulation  $m$  vérifie toujours  $m \ll 1$ .*

9. Montrer que le signal de porteuse modulé en phase peut se mettre sous la forme

$$v_s(t) \approx U_0 \cos(\omega_p t) + f(t) \sin(\omega_p t),$$

où  $f(t)$  sera exprimée en fonction de  $m, U_0, \omega_m$  et  $t$ .

Pour obtenir la tension  $v_s(t)$ , un opérateur « $D_p$ » est introduit dans le montage, comme indiqué sur la Fig. 3 (on utilise le même multiplieur que précédemment).

10. Quelle doit être la tension  $u_2'(t)$  en sortie de l'opérateur « $D_p$ » pour obtenir  $v_s(t)$  sous la forme ci-dessus, le taux de modulation  $m$  restant inchangé par rapport à sa valeur de la question 1.? Quelle transformation l'opérateur « $D_p$ » doit-il réaliser sur la tension  $u_2(t)$ ?

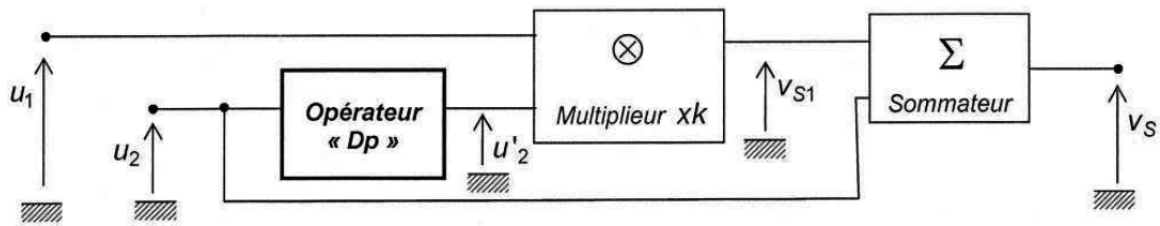
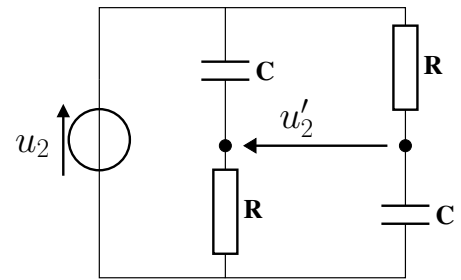


FIGURE 3 – Modulation en phase.

### b. Réalisation de l'opérateur « $D_p$ »

On utilise le montage ci-contre, dans lequel les valeurs de  $R$  et  $C$  n'ont a priori rien à voir avec les valeurs obtenues dans la partie 1.

11. Etablir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$  en fonction de  $R$ ,  $C$ , et  $\omega$ .
12. Montrer que le seul effet de cet opérateur est d'introduire un déphasage  $\varphi_D$  entre la sortie  $u_2(t)$  et l'entrée  $u'_2(t)$ . Exprimer  $\varphi_D$  en fonction de  $R$ ,  $C$ , et  $\omega$ .
13. Comment peut-on choisir le produit  $RC$ , en fonction de  $\omega_p$ , pour que l'opérateur de la Fig. 3 délivre effectivement le signal modulé en phase  $v_p(t)$  ?



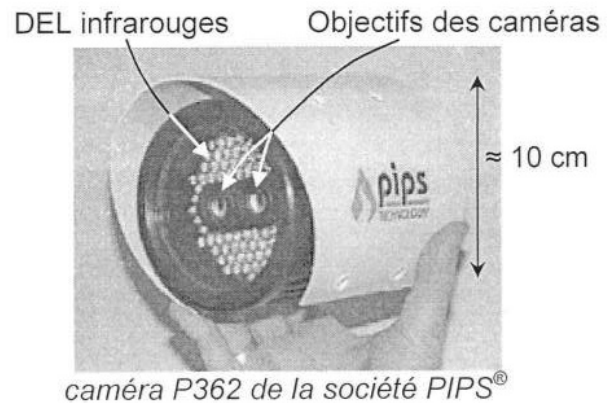
\*\*\* TOURNER SVP \*\*\*

## II. Caméra de contrôle des plaques d'immatriculation

Pour diminuer le nombre de véhicules circulant dans le centre ville et réduire ainsi les embouteillages, la pollution et le bruit qu'ils engendrent, plusieurs grandes agglomérations (Londres, Singapour, Stockholm) utilisent un système de péage urbain.

Différentes technologies sont mises en oeuvre pour détecter les véhicules entrant dans la zone de circulation taxée. Le système londonien, appelé London Congestion Charge (mis en place en 2003) utilise un réseau de 500 caméras installées à chaque point permettant d'entrer ou de sortir de la zone payante. Les images obtenues sont ensuite analysées par un algorithme LAPI (Lecture Automatique des Plaques d'Immatriculation) qui génère une liste des véhicules ayant circulé dans le centre ville, ce qui déclenche la facturation d'une taxe.

Ces systèmes doivent être robustes, peu coûteux, ne nécessiter aucun réglage et être fonctionnels dans des conditions de luminosité très variées. Le modèle retenu (ci-contre) comporte deux caméras identiques : l'une enregistrant dans le domaine visible et l'autre dans le proche infrarouge grâce un filtre stoppant les radiations visibles. Un ensemble de diodes électroluminescentes (DEL) émettant des flashes de longueur d'onde respective 810 nm et 950 nm entoure les caméras et permet d'illuminer la plaque d'immatriculation.



**Les spécifications du constructeur sont les suivantes :**

- Le capteur CCD (Charge Coupled Device) de ces caméras est un rectangle de diagonale  $1/4$  " (0,635 cm). Il est découpé en  $752 \times 582$  pixels carrés (largeur  $\times$  hauteur) tous identiques de côté  $a$ .
- Pour réduire le coût, les risques de panne et les réglages lors de l'installation, ces caméras ont une distance focale image  $f'$  fixe. Le constructeur propose différents modèles destinés à enregistrer les plaques d'immatriculation à une distance de mesure déterminée  $L$ . Le tableau suivant résume les modèles disponibles :

**Tableau 1**

Modèle de caméra	1	2	3	4	5
Focale $f'$	35,0 mm	25,0 mm	16,0 mm	12,0 mm	8,00 mm
Distance de mesure $L$	20,0 m	14,5 m	9,0 m	7,0 m	4,5 m

**La norme britannique concernant les plaques d'immatriculation est la suivante :**

Les plaques doivent mesurer 110 mm de hauteur et 520 mm de largeur. Les caractères doivent avoir une hauteur de 79 mm et une largeur de 50 mm, l'épaisseur du trait étant fixée à 14 mm.

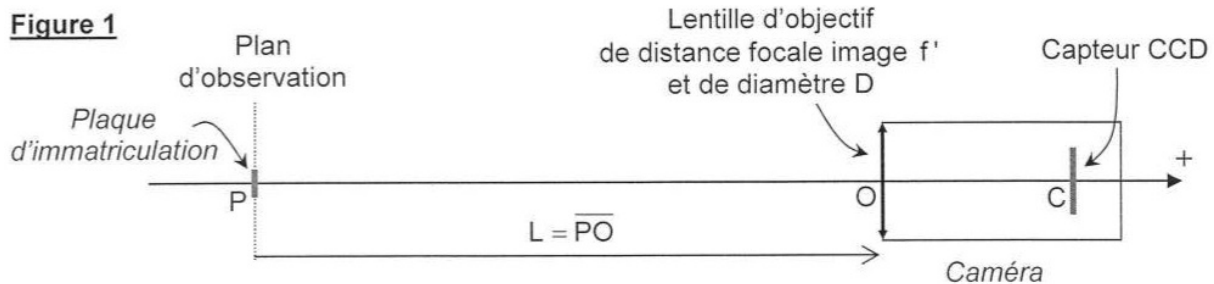


\* \* \* TOURNER SVP \* \* \*

## II.1. DIMENSIONNEMENT DES CAMERAS

Les caméras sont identiques et constituées d'une lentille d'objectif de distance focale image  $f'$  qui forme sur le capteur CCD une image de la plaque d'immatriculation.

La figure 1 illustre cette configuration (les échelles relatives ne sont pas respectées).



1. Donner la condition que doivent vérifier  $f'$  (distance focale image de la lentille) et  $PC$  (distance entre l'objet réel et son image réelle) pour que cette opération soit possible. Comment s'appelle la réalisation de l'image réelle d'un objet réel ?
2. Exprimer la distance  $\overline{OC}$  en fonction de  $L = \overline{PO}$  et  $f' = \overline{OF'}$ . Justifier pourquoi la lentille doit nécessairement être convergente.
3. Ecrire le grandissement  $\gamma$  en fonction de  $L$  et  $f'$ .
4. En tenant compte des valeurs numériques du Tableau 1, simplifier l'expression de  $\overline{OC}$  obtenue à la question 2. Commenter.
5. Simplifier de même l'expression de  $\gamma$ . Calculer la valeur numérique du grandissement  $\gamma$  pour ces cinq modèles de caméras (répondre avec 3 chiffres significatifs). Commenter.  
*Pour les questions suivantes,  $\gamma$  sera pris égal à la moyenne de ces cinq valeurs.*
6. Déterminer en millimètres la taille  $a$  d'un pixel, ainsi que la largeur  $\ell$  et la hauteur  $h$  du capteur CCD.
7. En déduire les dimensions horizontale  $\Delta_L$  et verticale  $\Delta_H$  du champ de vue dans le plan d'observation.  
Est-il suffisant d'installer une caméra par rue permettant d'accéder au centre ville ?
8. Déterminer la taille de l'image d'un des caractères de la plaque d'immatriculation sur le capteur CCD en micromètres, puis en pixels.
9. Le dimensionnement de la caméra est imposé par une valeur optimale de  $\gamma$  qui repose sur un compromis entre deux contraintes antagonistes : préciser lesquelles.
10. Quels problèmes se poseraient si le dispositif ne filmait que dans le domaine visible ? Quel est l'avantage à filmer une seconde image en infrarouge ?

*Les lentilles de ces caméras ont un diamètre  $D = 1,00$  cm. Elles se comportent donc comme une pupille circulaire qui diffracte la lumière. L'image d'une source ponctuelle n'est donc pas un point mais présente une certaine étendue spatiale due à la diffraction.*

11. Calculer, pour la caméra de modèle 1, l'ordre de grandeur de la largeur de la tache de diffraction de l'image d'un point sur le capteur CCD pour le rayonnement infrarouge utilisé. (Il n'est pas demandé de calcul complet, ni de formulation exacte).  
Comparer ce phénomène à la pixellisation de l'image. Limite-t-il la résolution ?

\* \* \* TOURNER SVP \* \* \*

## II.2. PROFONDEUR DE CHAMP

Bien que ces caméras ne disposent pas de dispositif de mise au point (leur distance focale est fixe), il est néanmoins possible de visualiser des plaques d'immatriculation qui ne sont pas rigoureusement situées à la distance  $L$  spécifiée par le constructeur (cf. Tableau 1). Le but de cette partie est de déterminer la profondeur de champ  $Z$ , c'est-à-dire la longueur de la zone de l'espace où l'objet peut-être placé afin que la caméra en fournisse une image considérée comme nette. Le document-réponse "Optique", à rendre avec la copie, comporte différentes figures sur lesquelles un objet ponctuel est situé sur l'axe optique (les constructions ne sont pas à l'échelle et ont pour seul but d'illustrer le phénomène). Le diamètre de la lentille est  $D = 1,00$  cm. Sur la première figure (B1), l'objet est situé en  $P_0$ , à la distance  $L$  spécifiée par le constructeur.

12. Compléter la figure B1 en représentant le trajet des deux rayons lumineux issus de  $P_0$  et frappant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés. Représenter la position de l'image  $C_0$  de ce point  $P_0$  par la lentille d'objectif. (*Un soin particulier est attendu dans la réalisation de la construction dont la démarche doit être rigoureusement justifiée.*)

*Le capteur CCD est positionné dans le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par  $C_0$ . L'objet ponctuel  $P_1$  est maintenant placé à une distance  $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$  de  $P_0$ .*

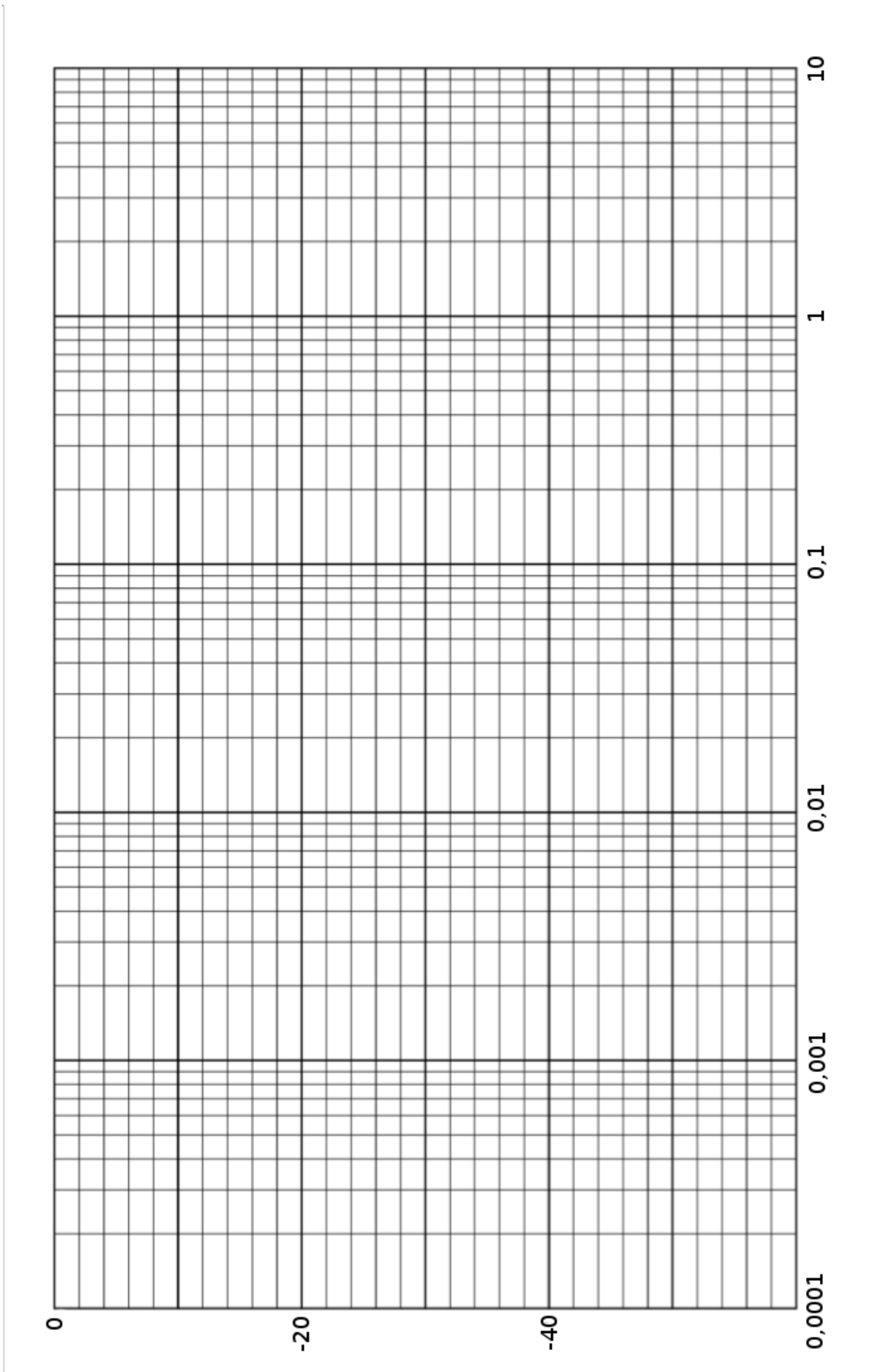
13. Compléter la seconde figure du document-réponse en y représentant :
- le plan du capteur CCD (en reportant le point  $C_0$  de la construction de la question B1)
  - le trajet des deux rayons lumineux issus de  $P_1$  et frappant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés. Son image est notée  $C_1$ .

*Ce faisceau ne forme pas une image ponctuelle sur le capteur mais un disque de diamètre  $d_1 > 0$  qui doit être inférieur à la taille  $a$  d'un pixel pour que l'image soit nette :  $0 < d_1 < a$ .*

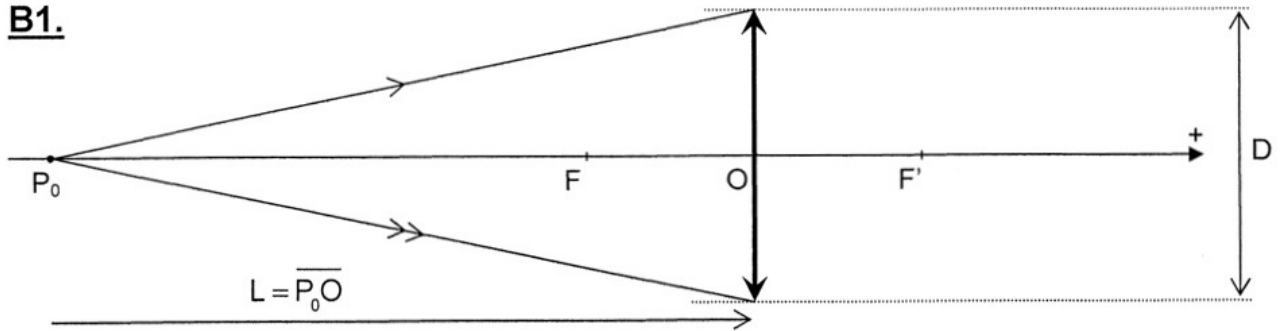
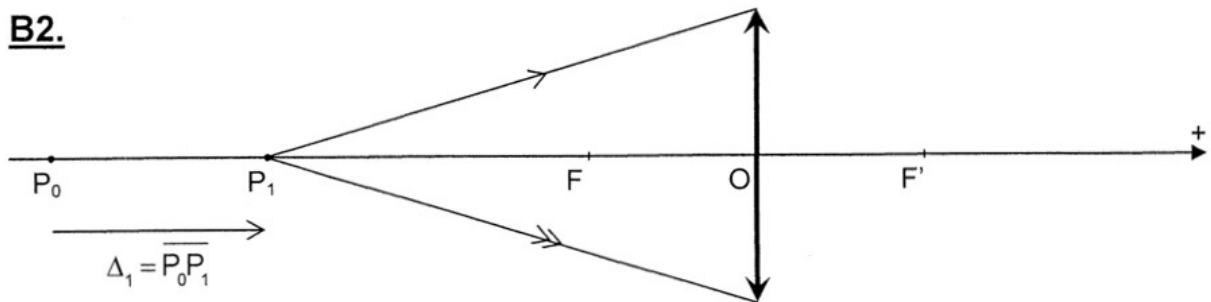
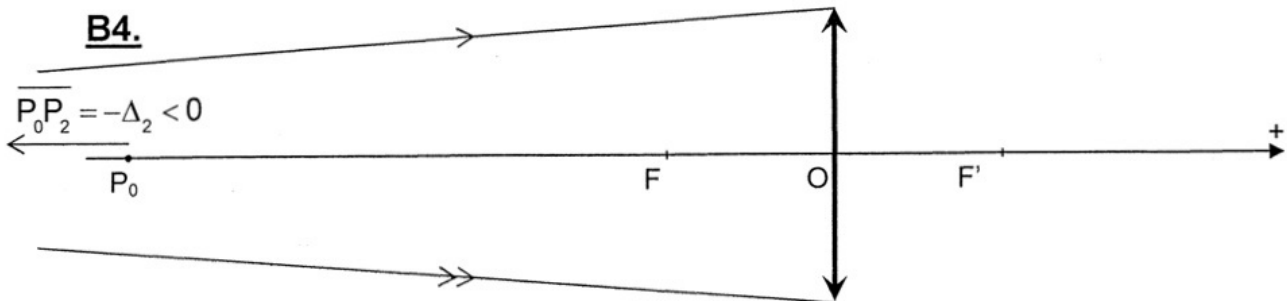
14. Montrer que le diamètre de la tache image, noté  $d_1$ , peut s'exprimer sous la forme :  $d_1 = \beta \frac{f' \Delta_1}{(L-f')(L-\Delta_1)}$  où  $\beta$  est un facteur à expliciter.
15. Compléter la troisième figure (B3), en construisant l'image  $C_2$  dans le cas où  $\overline{P_0P_2} = -\Delta_2 < 0$  ( $\Delta_2 > 0$  est une distance).  
*Le diamètre de la tache image peut alors s'exprimer sous la forme  $d_2 = \beta \frac{f' \Delta_2}{(L-f')(L+\Delta_2)}$ .*
16. Simplifier les expressions de  $d_1$  et  $d_2$  sachant que  $f' \ll L$ .
17. Exprimer, en fonction de  $a, L, D$  et  $f'$ , les distances  $\Delta_{1\text{lim}}$  et  $\Delta_{2\text{lim}}$  telles que la tache image sur le capteur ait un diamètre égal à la taille d'un pixel.
18. Calculer les valeurs numériques des distances  $\Delta_{1\text{lim}}$  et  $\Delta_{2\text{lim}}$  pour la caméra 3, en prenant  $a = 7,00 \mu\text{m}$ . En déduire la profondeur de champ  $Z$ .
19. Commenter le choix d'une lentille de petit diamètre pour réaliser cette caméra.

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*

Annexe : Document-réponse "Electronique", à compléter et à rendre avec la copie





**Document-réponse « Optique », à compléter et à rendre avec la copie****B1.****B2.****B4.**Remarque : P<sub>2</sub> est en dehors de la figure