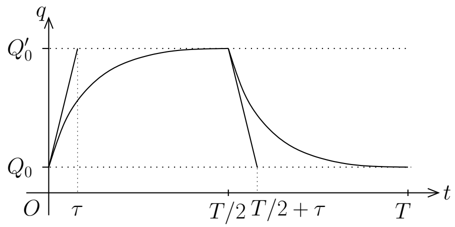
ECTRICIT

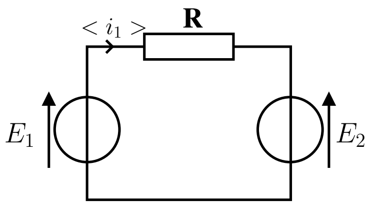
I. Capacitmmut : simulation d'une rstance

1. a) Loi des mailles $E_1 = ri_1 + q/C$ avec $i_1 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ conduit $\tau\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q = CE_1$ avec $\boxed{\tau = rC}$.
   b) La solution grale s'it $q = CE_1 + A\,e^{-t/\tau}$. La continuit la tension $=0 impose$A=$Q_0 - CE_1$, d'o $\boxed{q = CE_1 + (Q_0 - CE_1)\,e^{-t/\tau}}$.
   c) On obtient $\boxed{Q_0' = CE_1 + (Q_0 - CE_1)\,e^{-a}}$. Le rme permanent pour cette phase est CE_1. Comme $a = 5,0$, l'rt relatif est $\boxed{\frac{Q_0' - CE_1}{CE_1} = (Q_0/CE_1 - 1)\,e^{-a}} \approx \underline{7\,10^{-3}\,(Q_0/CE_1 - 1) \ll 1}$. Donc on peut admettre que le rme permanent est atteint eux que 1% pr : $\boxed{Q_0' \approx CE_1}$.
2. a) De m on a maintenant $E_2 = ri_2 + q/C$ avec $i_2 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, d'o $\boxed{\tau\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q = CE_2}$.
   b) De fa analogue on obtient $q = CE_2 + (Q_0' - CE_2)\,e^{-t'/\tau} \approx \boxed{CE_2 + C(E_1 - E_2)\,e^{-t'/\tau}}$ avec $t' = t - \frac{T}{2}$.
   c) Par continuit podicit$Q_0 = q(0) = q(T) = CE_2 + C(E_1 - E_2)\,e^{-a}$, donc $\boxed{Q_0 \approx CE_2}$.
3. Pour le graphe, on note que $Q_0 = Q_0'/5$. Le condensateur oscille podiquement entre deux ts.



4. On note i le courant qui "descend" dans le condensateur, et i_1 et i_2 sont aussi orienters le condensateur. $< i(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = (q(T) - q(0))/T$. Donc $\boxed{< i(t) >= 0}$ par podicit De m, $< i_1(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T i_1\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = (q(T/2) - q(0))/T = (Q_0' - Q_0)/T$ d'o $\boxed{< i_1(t) >= C(E_1 - E_2)/T}$.
   Enfin, $< i_2(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T i_2\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{T/2}^T \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = (q(T) - q(T/2))/T = (Q_0 - Q_0')/T$ d'o $\boxed{< i_2(t) >= - < i_1(t) >= C(E_2 - E_1)/T}$.
5. On souhaite simuler le circuit ci-contre.
   Ce circuit est parcouru par un courant $< i_1 >= (E_1 - E_2)/R$.
   Par identification avec le rltat prdent on en dit

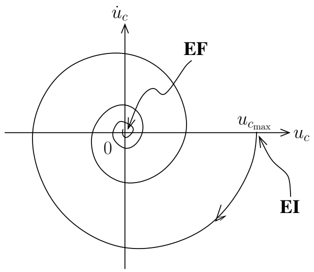
$$\boxed{R = \frac{T}{C}} = \underline{1,0\,\mathrm{k}\Omega}.$$



II. Circuit RLC se en rme libre

1. On oriente le courant en convention rpteur pour le condensateur. Loi des mailles : $u_c + ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$. En injectant $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ on obtient $\boxed{\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{u}_c + \omega_0^2\,u_c = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \text{ et } Q = \frac{1}{r}\sqrt{L/C}}$.

2. Pour $r = 0$ le rme est harmonique. La solution grale s'it $u_c = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$. La charge du condensateur et le courant sont continus donc $q_0/C = A$ et $i(0) = 0 = CB\omega_0$. D'o $\boxed{u_c(t) = q_0/C\,\cos(\omega_0 t)}$.
   Ce signal oscille pode $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$.
3. a) Le rme oscille autour du rme permanent, donc c'est un rme <u>pseudopodique</u>. Le facteur de qualitrifie $Q > \frac{1}{2}$, donc $\boxed{r < 2\sqrt{L/C}}$.
   b) La forme de la solution est $\boxed{u_c = D\,e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\,\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ (par rlution de l'ation caractstique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$). On drmine les constantes par les conditions initiales : $q_0/C = D\,\cos\varphi$ et $i(0)/C = -\frac{\omega_0}{2Q}\,\cos\varphi - \omega\,\sin\varphi = 0$. On en dit $\tan\varphi = -\left(4Q^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$ avec $\varphi \in] - \frac{\pi}{2}, 0]$, donc $\boxed{\varphi = -\arctan\left(4Q^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}}$. D'autre part on obtient $\boxed{D = \frac{q_0}{C}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.
   On peut aussi exprimer les choses autrement : $\boxed{u_c = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{\tau = 2Q/\omega_0}$, $\boxed{D = \frac{q_0}{C}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}}$, et $\boxed{\varphi = -\arctan\frac{1}{\tau\omega}}$.
   Remarque : on peut aussi appliquer les conditions initiales en passant par la forme $u_c = e^{-\frac{t}{\tau}}\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$. *On obtient* $u_c = \frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}\,(\cos(\omega t) + \frac{1}{\tau\omega}\sin(\omega t))$.
   c) Comme on observe un nombre relativement grand d'oscillations, on peut considr que Q est "grand" et que les extrema sont localisur l'enveloppe exponentielle. Soit le maximum $t_{\max}$, on a donc $u_c(t_{\max}) \approx D\,e^{-\frac{t_{\max}}{\tau}}$ et le maximum suivant est approximativement en $t_{\max} + T$, avec $T = 2\pi/\omega$. Par dnition $\delta = \ln\frac{u_c(t_{\max})}{u_c(t_{\max}+T)}$, ce qui conduit d'apre qui prde $\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\pi}{Q}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.
4. a) On mesure la pseudopode par l'rtement des zs de la solution de l'ation homog, espace $T/2$, c'est-ire les points o u_c croise le rme permanent. Ici il s'agit de la valeur 0. On compte 10 zs en 9 µs, donc $\underline{T = 2\,\mu\mathrm{s}}$.
   b) *Il n'est pas trrudent d'utiliser le point en $t = 0$ car on n'est pas certain que ce soit vraiment un maximum.* En utilisant le premier maximum et le dernier (5), on obtient $\delta = \ln(1,7/0,15)/4 \approx 0,61$. En utilisant plutt le premier et le dernier minimum, on obtient $\delta = \ln(2,3/0,2)/4 \approx 0,61$. On gardera donc la valeur $\boxed{\delta = 0,61}$. On en dit $\boxed{Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}}} \approx \underline{5,2}$. On a donc Q "relativement" grand, ce qui justifie a posteriori les hypoths prdentes.
   Remarque : on constate que pour cette valeur, on aurait pu utiliser la relation simplifi$\delta \approx \frac{\pi}{Q}$*, ce qui aurait donn = 5,1.* $\boxed{\frac{T - T_0}{T_0} = 1 - \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} \approx \underline{-0,5\,\%}$.
   d) *On en dit que* $\omega_0 \approx \omega = 2\pi/T$ *,5 %prOr*$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ *donc* $\boxed{L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C}} \approx \underline{2,5 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}}$.
   e) Sur le graphe, on lit la valeur maximale instant initial : $\underline{u_{c_{max}} = 1,6\,\mathrm{V}}$, *d'o* $\boxed{q_0 = Cu_{c_{max}}} = \underline{1,6 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}}$.



5. On obtient le portrait ci-contre :
6. $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{q_0}{\tau}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,[\cos(\omega t+\varphi)+\omega\tau\sin(\omega t+\varphi)] = -\frac{q_0}{\tau}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\sin(\omega t+\varphi-\varphi)$. Comme $Q \gg 1$, on obtient limite $\omega \approx \omega_0$, et $\omega_0\tau = 2Q \gg 1$ donc $\boxed{i(t) \approx -\omega_0 q_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\sin(\omega_0 t)}$.
7. L'rgie est stoquous forme ctrique dans le condensateur et magnque dans le bobine : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$. Comme $Q \gg 1$, on a aussi $\varphi \approx 0$ et $D \approx q_0/C$. D'o $u_c \approx \frac{q_0}{C}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega_0 t)$, ce qui m E $\approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\,\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\,\sin^2(\omega_0 t)$ donc $\boxed{\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}}$ $D'apr'expressionci-dessus, quiestapproximative,E\underline{do}$

au cours du temps. En fait ce rltat est exact car le bilan de puissance du circuit s'it : $i\,u_c + iL\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -ri^2$. Avec $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -ri^2 < 0}.$$

Ainsi l'rgie stoqust dissp tout instant par effet Joule dans la rstance.

8. $\alpha = 1 - \frac{E(t+T)}{E(t)} \approx 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \approx \frac{2T}{\tau} = \frac{\omega_0 T}{Q}$ d'o $\boxed{\alpha \approx \frac{2\pi}{Q}}$.

Ainsi, le facteur de qualitnd compte de la rnence de l'rgie stoquans le circuit. Plus Q est grand, plus l'rgie met de temps re dissip