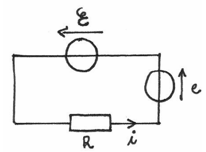
INDUCTION

I. Microphone électrodynamique *(d'après CCP PT 2011)*

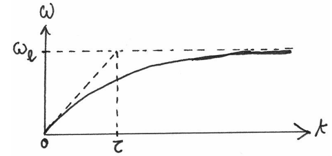
1. Le conducteur est en mouvement en présence d'un champ magnétique constant. Il est donc le siège d'un phénomène d'induction de Lorentz, qui d'après la loi de Lenz doit conduire à un freinage du conducteur par les actions de Laplace. Ceci nécessite donc l'apparition d'un courant.
L'apparition de la fem et son calcul repose sur la présence d'un champ électromoteur. Cette notion est maintenant hors programme ! La loi de Faraday ne s'appliquant pas dans de nombreux systèmes (comme ce microphone), exit la compréhension des dispositifs réels...
2. $\mathrm{d}\overrightarrow{F_L} = i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_r = i\,\mathrm{d}\ell\,B\,\vec{u}_z$. D'où en intégrant $\boxed{\overrightarrow{F_L} = -i\ell B\vec{u}_z}$ avec $\boxed{\ell = N2\pi a}$ la longueur totale de fil bobiné.
3. $\overrightarrow{E_m} = \dot{z}\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r = \dot{z}B\vec{u}_\theta$. La fem induite s'écrit $e = \int_{\text{bobine}} \overrightarrow{E_m}.\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^\ell \dot{z}B\vec{u}_\theta\,.\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_\theta$, d'où $\boxed{e = B\ell\,\dot{z}}$.
4. La bobine bouclée est équivalente à un circuit fermé constitué d'une résistance, d'une inductance et de la fem e. La loi des mailles s'écrit $0 = Ri + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - e$ d'où
$$\boxed{0 = Ri + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - B\ell\,\dot{z}} \qquad (1)$$
5. L'air est présent à gauche et à droite de la membrane, mais l'onde sonore n'est présente qu'à droite, donc $\overrightarrow{F_P} = P_a\,S\,\vec{u}_z - (P_a + p)\,S\,\vec{u}_z$ d'où $\boxed{\overrightarrow{F_P} = -p\,S\,\vec{u}_z}$.
6. Le théorème de la résultante cinétique projeté selon $\vec{u}_z$ conduit à
$$\boxed{m\ddot{z} = -p\,S - k\,z - \beta\,\dot{z} - B\ell\,i} \qquad (2)$$
7. Pour l'Eq. (1), on obtient $\boxed{B\ell\,\underline{\dot{z}} = \underline{Z_e}\,\underline{i}}$ avec $\boxed{\underline{Z_e} = R + jL\omega}$.
De même pour l'Eq. (2), on obtient $\boxed{\underline{Z}_{\text{meca}}\,\underline{\dot{z}} = -S\,\underline{p} - B\ell\,\underline{i}}$ avec l'impédance mécanique $\boxed{\underline{Z}_{\text{meca}} = \beta + jm\omega + \dfrac{k}{j\omega}}$.
8. En éliminant $\underline{\dot{z}}$ dans les deux équations précédentes, on obtient $\underline{i} = \underline{A}\,\underline{p}$ avec $\boxed{\underline{A} = \dfrac{X}{\underline{Z}_{\text{meca}}\,\underline{Z}_e + Y}}$ et
$\boxed{X = -BN2\pi a\,S}$ et $\boxed{Y = B^2N^24\pi^2a^2}$.
9. X et Y ne dépendent pas de ω mais $\underline{Z}_{\text{meca}}\,\underline{Z}_e$ en dépend. On écrit $\underline{Z}_{\text{meca}}\,\underline{Z}_e = \beta\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)(R + jL\omega)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\boxed{Q = \frac{1}{\beta}\sqrt{mk}}$. La dépendance en ω peut être limitée en imposant deux conditions :
   - d'une part travailler à des fréquences suffisamment basses pour que $\boxed{\omega \ll \dfrac{R}{L}}$;
   - d'autre part limiter la résonance en imposant $Q \ll 1 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{mk} \ll \beta}$.

   Pour un domaine fréquentiel imposé, la première condition peut s'obtenir en augmentant le rayon du bobinage pour une longueur de fil donné (pour diminuer L à R fixé). La seconde condition s'obtient en recherchant un système { membrane + bobine } léger et un ressort de faible raideur.
   Si A est indépendant de ω, le microphone **restitue parfaitement (sans filtrage) le spectre** du son.

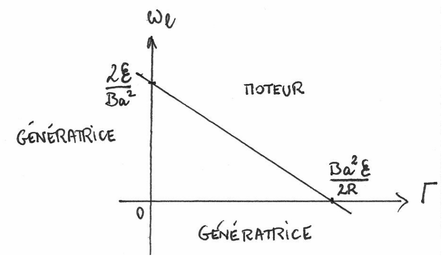
II. Moteur à courant continu à entrefer plan



1. Loi des mailles : $\mathcal{E} = Ri - e$.
La fem induite se calcule par la loi de Faraday :
$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}Ba^2\,\dot{\theta} = -\frac{1}{2}Ba^2\,\omega$. D'où $\boxed{\mathcal{E} = Ri + \frac{1}{2}Ba^2\,\omega}$.
2. Moment résultant en O des forces de Laplace (on utilise une base polaire attachée au rayon métallique) :
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_L(O) = \int_{r=a}^{r=0} r\,\vec{u}_r \wedge (i\mathrm{d}r\vec{u}_r \wedge B\vec{u}_z) = -iB\,\vec{u}_z \int_{r=a}^{r=0} r\mathrm{d}r \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_L(O) = \tfrac{1}{2}Ba^2\,i\,\vec{u}_z}$$
3. Le théorème scalaire du moment cinétique selon l'axe Oz s'écrit $\boxed{J\dot{\omega} = \frac{1}{2}Ba^2\,i - \Gamma}$.
4. En éliminant le courant dans les deux équations électrique et mécanique, on obtient
$$\boxed{\tau\dot{\omega} + \omega = \omega_\ell} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \tfrac{4JR}{B^2a^4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_\ell = \tfrac{2}{Ba^2}\left[\mathcal{E} - \tfrac{2}{Ba^2}R\Gamma\right]}.$$
Pour un départ sans vitesse initiale on obtient $\boxed{\omega = \omega_\ell\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$.



5. On observe que dans le domaine moteur ($\Gamma\omega > 0$), plus le couple à fournir est important, plus le moteur tourne lentement. D'autre part, si le couple dépasse la valeur seuil $\Gamma_c = \frac{Ba^2}{2R}$, alors cela signifie que le couple résistant est trop fort, et la machine se met à fonctionner en génératrice ($\Gamma\omega < 0$, le moteur ne peut fonctionner en moteur et la roue tourne dans l'autre sens malgré lui). Γ_c est donc la plus grande valeur possible de couple que le moteur peut délivrer.



6. L'équation du TMC prise en régime permanent ($\dot{\omega} = 0$) conduit à $\boxed{i_{\text{pe}} = \dfrac{2}{Ba^2}\,\Gamma}$. Ceci équivaut à $\Gamma = \frac{Ba^2}{2}\,i$, c'est-à-dire qu'en régime permanent, le moment du couple délivré par le moteur est égal au moment résultant des forces de Laplace.
7. Le bilan électrique s'écrit $\mathcal{E}i = Ri^2 - ei = Ri^2 + \frac{1}{2}Ba^2\omega i$.
Le bilan mécanique s'écrit : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = \frac{1}{2}Ba^2i\omega - \Gamma\omega$. On retrouve que la somme de la puissance des actions de Laplace compense exactement la puissance cédée par la force électromotrice induite. En soustrayant ces équations on obtient $\boxed{\mathcal{E}i = \Gamma\omega + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}J\omega^2\right) + Ri^2}$. Ainsi, en plus de la puissance fournie à l'extérieur $\Gamma\omega$, le générateur doit mettre le moteur et sa charge en mouvement, et une partie de l'énergie est irrémédiablement perdue par effet Joule.
8. Les fem apparaissant sur chaque rayon sont égales mais en parallèle, donc au final on a toujours une seule fem $e = -\frac{1}{2}Ba^2\,\omega$. Ainsi, l'équation électrique reste inchangée.
Par ailleurs, le courant total i (qui est donc inchangé) se répartit dans chaque rayon à raison de $\frac{i}{N}$. Mais le moment résultant des actions de Laplace est la somme des N moments appliqués appliqués sur chaque rayon. Ainsi on obtient toujours le même moment résultant, et **l'équation mécanique du TMC** reste inchangée.
L'intérêt réside seulement dans le fait qu'en répartissant les efforts tout autour du disque, **la résultante des actions de Laplace devient nulle**. C'est donc l'équation du TRC qui se trouve modifiée : on est en présence d'un **couple**, et les actions de Laplace ne « tirent » plus sur l'axe. Cela **évite les vibrations du moteur**.