

## Système liquide-vapeur de l'eau

(d'après CCP MP 2007)

### Diagramme de Clapeyron ( $p, v$ ) du système liquide-vapeur de l'eau.

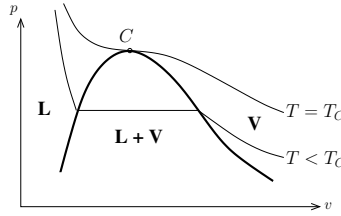
1. a) On représente la courbe de saturation en gras ci-contre.
- b) Les deux isothermes sont représentées en traits fins.

2. On définit le *titre massique en vapeur* par  $x = \frac{m_G}{m_L + m_G}$  où  $m_L$  et  $m_G$  sont respectivement les masses de liquide et de gaz.

Soit  $Y$  une grandeur extensive du système diphasique (ici  $V$  ou  $H$ ) et  $y$  sa grandeur massique associée :

$$Y = Y_V + Y_G \Leftrightarrow (m_L + m_G)y = m_L y_L + m_G y_G \Leftrightarrow y = (1-x)y_L + x y_G$$

donc  $x = \frac{y - y_L}{y_G - y_L}$ , ce qui peut s'écrire avec  $v$  ou  $h$  en particulier.



3. a) Par définition  $l_V(T) = h_G(T) - h_L(T)$ .

b) On part d'un système liquide seul de masse  $m$  à la température  $T_0$ , qui subit une transformation conduisant à l'état diphasique de titre massique en vapeur  $x$  à la température  $T$ . La transformation est décomposée en un changement de température du liquide suivi d'un changement d'état isotherme (et donc isobare) :  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m c_L \ln \frac{T}{T_0} + m_G \frac{l_V(T)}{T}$ . En divisant par la masse totale  $m$ , on retrouve bien l'expression proposée.

### Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur

4. Le volume massique vaut  $v = V/m = 1,00 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . D'après les données, à cette température  $T = 100^\circ\text{C}$  on a  $v_L < v < v_G$  donc il s'agit bien d'un mélange diphasique. On obtient  $x = \frac{v - v_L}{v_G - v_L} = 0,60$ .

5. La détente étant isentropique, on a  $\Delta s = 0 = c_L \ln \frac{T'}{T} + \frac{l_V(T')}{T'} x' - \frac{l_V(T)}{T} x$ , d'où

$$x' = \frac{T'}{h_G(T') - h_L(T')} \left[ \frac{h_G(T) - h_L(T)}{T} x + c_L \ln \frac{T'}{T} \right] = 0,57. \quad (1)$$

On a donc appauvri le système en gaz.

6. En écrivant  $x = x' = x''$  dans le bilan précédent, on obtient

$$x'' = c_L \ln \frac{T}{T'} \left[ \frac{h_G(T') - h_L(T')}{T'} - \frac{h_G(T) - h_L(T)}{T} \right]^{-1} = 0,45.$$

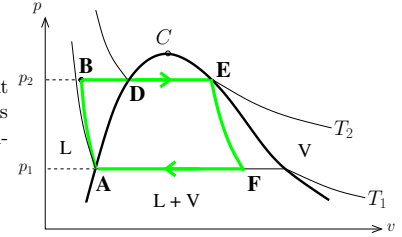
Cette transformation est possible car la vaporisation d'une masse de  $x \text{ kg}$  de liquide n'a pas le même coût énergétique à deux températures différentes ( $l_V(T') \neq l_V(T)$ ).

### Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur - Cycle de Rankine.

7.

On obtient le cycle ci-contre.

On constate dans les données que les pressions  $p_1$  et  $p_2$  sont respectivement les pressions de saturation aux températures  $T_1 = 35^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 285^\circ\text{C}$ . Donc sur les deux paliers de changement d'état on a  $T_F = T_A = T_1$  et  $T_D = T_E = T_2$ .



8. De nouveau on a affaire à une transformation isentropique, donc  $0 = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp$ , ce qui donne en intégrant (avec  $v_L$  supposé constant et  $\Delta T \ll T_1$ ) :  $\frac{\Delta T}{T_1} \approx \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_1} \right) = \frac{\alpha v_L}{c_L} \Delta p$ . D'où

$$\Delta T \approx \frac{\alpha v_L}{c_L} (p_2 - p_1) T_1 = 0,08 \ll T_1.$$

9. De E à F le système subit une détente adiabatique réversible. En réutilisant l'Eq. (1) (question 5.) avec  $x = x_E = 1$ , on obtient

$$x_F = \frac{T_1}{h_G(T_1) - h_L(T_1)} \left[ \frac{h_G(T_2) - h_L(T_2)}{T_2} + c_L \ln \frac{T_2}{T_1} \right] = 0,66.$$

On en déduit  $h_F = (1 - x_F) h_L(T_1) + x_F h_G(T_1) = 1,74 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

10. a) Dans le condenseur :  $q_1 = \Delta h_{FA} = h_A - h_F$  donc

$$q_1 = h_L(T_1) - h_F = -x_F (h_G(T_1) - h_L(T_1)) = -1,60 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Dans le générateur de vapeur :  $q_2 = \Delta h_{BE} = \Delta h_{BD} + h_E - h_D$  donc

$$q_2 = c_L (T_2 - T_1) + h_G(T_2) - h_L(T_2) = 2,55 \times 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

b) Le premier principe appliqué à un cycle complet conduit pour une masse unité à  $0 = w + q_1 + q_2$ , donc  $w = -q_1 - q_2 = -955 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

c) La centrale joue le rôle de moteur. Le transfert thermique apporté par la source chaude est consommé pour produire du travail. Donc le rendement est défini par  $\rho = -\frac{w}{q_2} = 0,37$ .

Le rendement de Carnot s'obtient en considérant un cycle réversible, donc  $\frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} = 0$ . En effet en l'absence de données dans l'énoncé, on suppose que les sources sont à la température des paliers de changement d'état, ce qui est cohérent avec l'hypothèse d'un cycle réversible (pas d'hétérogénéité de température). Ceci conduit avec  $w = -q_1 - q_2$  à  $\rho_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0,45$ , ce qui est naturellement supérieur au rendement réel.

11. Exprimons la variation élémentaire d'enthalpie massique sur un chemin réversible, ce qui est possible puisque c'est une fonction d'état<sup>1</sup> :

$$dh = du + d(pv) = \delta Q_{\text{rev}} - p dv + p dv + v dp = ds + v dp.$$

La transformation étant isentropique, on obtient  $\Delta h_{AB} = \int_A^B v_L dp$ . En supposant  $v_L$  constant (incompressible) on obtient  $\Delta h_{AB} = v_L (p_2 - p_1) = 6,91 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Cette variation est approximativement de trois ordres de grandeur plus petite que celles calculées précédemment. Cela est cohérent avec l'hypothèse souvent faites pour les phases condensées :  $\Delta h_{AB} \approx \Delta u$  (ici  $\Delta u \approx 0$ ).

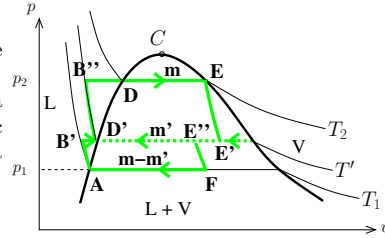
1. La relation différentielle établie ici s'appelle la *seconde identité thermodynamique*, la première étant celle portant sur la fonction  $u$  :  $du = T ds - p dv$ . Avant 2013, ces deux relations faisaient partie intégrante du cours dans le programme de Sup. Elles sont bien entendu valables aussi sous forme extensive, cad pour les grandeurs non massiques :  $dU = T dS - p dV$  et  $dH = T dS + V dp$ .

12. D'après les questions précédentes :  $w = -q_1 - q_2 = -\Delta h_{FA} - \Delta h_{BE} = h_F - h_E + \Delta h_{AB}$ , donc  $w \approx h_F - h_E$ . Cette relation exprime bien que le travail utile produit par la centrale est récupéré au niveau de la turbine. Son mouvement est transmis au rotor, qui permet ensuite de produire une tension alternative.

**Cycle de Rankine avec soutirage**

13.

On obtient le cycle ci-contre. Le circuit se dédouble en  $E'$ . Le trajet en pointillé représente celui de la vapeur soutirée. On constate dans les données que la pression  $p'$  est la pression de saturation à la température  $T' = 185^\circ\text{C}$ . Donc sur le palier de changement d'état intermédiaire on a  $T_{E'} = T_{E''} = T_{D'} = T_{B'} = T'$ .



14. La vapeur saturante part de l'état  $E'$ . Le liquide du réchauffeur part de l'état  $B'$ . Les deux sous-systèmes se rejoignent en  $D'$ . On prend pour système l'ensemble {vapeur saturante + liquide dans le réchauffeur}, qui subit une transformation adiabatique (ils échangent de la chaleur entre eux) et isobare, donc isenthalpique :  $\Delta H = 0 = \Delta H_{\text{vap}} + \Delta H_{\text{liq}} = -m' \ell_v(T') + (m - m') c_L (T' - T_1)$ , ce qui conduit à

$$\frac{m'}{m} = \left( 1 + \frac{h_G(T') - h_L(T')}{c_L (T' - T_1)} \right)^{-1} = 0,239.$$

15. a) On réutilise l'Eq. (1), entre  $E$  et  $E'$  (avec  $x = 1, x' = x'_1, T = T_2$  et  $T' = T'$ ) :

$$x'_1 = \frac{T'}{h_G(T') - h_L(T')} \left[ \frac{h_G(T_2) - h_L(T_2)}{T_2} + c_L \ln \frac{T_2}{T'} \right] = 0,81.$$

On en déduit  $h'_1 = (1 - x'_1) h_L(T') + x'_1 h_G(T') = 2,40 \times 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

- b) Après soutirage de  $m'$ , le mélange diphasique restant est en  $E''$ . Son titre en vapeur est  $x''_1 = (m x'_1 - m') / (m - m')$  donc  $x''_1 = \frac{x'_1 - m'/m}{1 - m'/m} = 0,75$ . De ce point on applique à nouveau l'Eq. (1), d'où

$$x_2 = \frac{T_1}{h_G(T_1) - h_L(T_1)} \left[ \frac{h_G(T') - h_L(T')}{T'} \frac{x''_1 - m'/m}{1 - m'/m} + c_L \ln \frac{T'}{T_1} \right] = 0,63.$$

On en déduit  $h_2 = (1 - x_2) h_L(T_1) + x_2 h_G(T_1) = 1,66 \times 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

16. Sous l'hypothèse que les phases de compression sont approximativement isenthalpiques, et en raisonnant en grandeurs massiques, on a de nouveau  $w_s = -q_{1s} - q_{2s}$ , mais cette fois

$$q_{1s} = \frac{m - m'}{m} \Delta h_{FA} = \left( 1 - \frac{m'}{m} \right) (h_A - h_F) = \left( 1 - \frac{m'}{m} \right) (h_L(T_1) - h_2) = -1,15 \times 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ et}$$

$$q_{2s} = \Delta h_{B''E} = \Delta h_{B''B'} + \Delta h_{B'E} = c_L (T_2 - T') + h_G(T_2) - h_L(T_2) = 1,93 \times 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

On obtient alors  $w_s = -771 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

17. On en déduit  $\rho_s = -\frac{w_s}{q_{2s}} = 1 + \frac{q_{1s}}{q_{2s}} = 0,40 > \rho$ . Le rendement est donc amélioré par le soutirage.