THERMODYNAMIQUE

Cycle de Brayton dans une centrale - *d'après Centrale MP 2012*

1. Pour une quantité n de gaz parfait monoatomique à la température T, l'énergie interne U s'écrit :

$$\boxed{U = \frac{3}{2}nRT}$$

Son enthalpie vaut alors : $H = U + pV = U + nRT = \frac{3}{2}nRT$ (où p et V désignent respectivement la pression et le volume du gaz considéré).

Les capacités thermiques s'en déduisent :

$$\boxed{\begin{cases} C_{V,m} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}R \\ C_{p,m} = \left(\frac{\partial H_m}{\partial T}\right)_p = \frac{5}{2}R \end{cases}}$$

2. Pour une transformation élémentaire adiabatique, le premier principe donne $\mathrm{d}U = \delta W$. Une transformation réversible est nécessaire quasi-statique sur le plan mécanique donc $\delta W = -p\mathrm{d}V$. Grâce à la première loi de Joule pour les gaz parfaits, $\mathrm{d}U = C_v\,\mathrm{d}T$, ceci conduit à $C_v\,\mathrm{d}T = -p\mathrm{d}V = -p\,\mathrm{d}(\frac{nRT}{p}) = nR\frac{\mathrm{d}p}{p}$. De plus, d'après la relation de Mayer pour un gaz parfait :

$$C_p - C_V = nR \Rightarrow C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

Or, pour une transformation adiabatique réversible, $dS = 0$, d'où :

$$0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p}$$

Par intégration, il vient la loi de Laplace :

$$\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p} = cte \Rightarrow \frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = cte$$

On a donc :

$$\boxed{\beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{2}{5} = 0,4}$$

3. La transformation $1 \to 2$ est adiabatique réversible. On a donc :

$$\frac{T_2}{p_2^\beta} = \frac{T_1}{p_1^\beta} \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 r_p^\beta} = 520\,\mathrm{K}$$

De même pour la transformation $3 \to 4$:

$$\frac{T_4}{p_4^\beta} = \frac{T_3}{p_3^\beta} \Rightarrow T_4 = T_3\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^\beta$$

Or, les transformations $2 \to 3$ et $4 \to 1$ étant isobares, on a $p_4 = p_1$ et $p_3 = p_2$, d'où :

$$\boxed{T_4 = T_3 r_p^{-\beta}} = 750\,\mathrm{K} > T_2$$

4. — Les transformations isobares sont représentées par $p = cte = \frac{RT}{V_m}$.
Les transformations adiabatiques réversibles suivent la loi de Laplace démontrée précédemment et qui peut se réécrire $pV_m^\gamma = cte$.

— Déterminons le rapport $V_{m,3}/V_{m,1}$:
La transformation isobare $2 \to 3$ se fait à rapport V_m/T constant, d'où :

$$V_{m3} = V_{m2}\frac{T_3}{T_2} = V_{m2}\frac{T_3}{T_1}r_p^{-\beta}$$

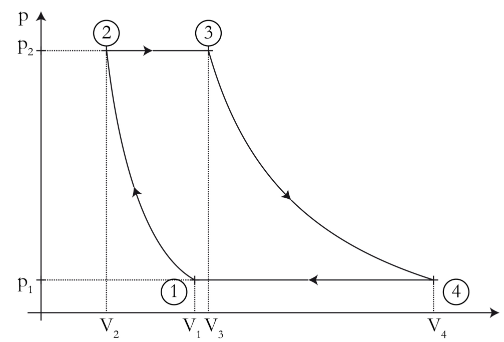
Or, le long de l'adiabatique réversible $1 \to 2$, on a la loi de Laplace $pV_m^\gamma = cte$, donc :

$$p_2 V_{m2}^\gamma = p_1 V_{m1}^\gamma \Rightarrow V_{m2} = V_{m1} r_p^{-1/\gamma}$$

Finalement, il vient :

$$\boxed{\frac{V_{m3}}{V_{m1}} = \frac{T_3}{T_1}r_p^{-(\beta+1/\gamma)} = \frac{T_3}{T_1}r_p^{-1}} = 1,1 > 1$$

— Nous savons maintenant que le volume molaire en 3 est plus important qu'en 1, ce qui permet d'achever l'allure du diagramme de Clapeyron :



5. Les transformations $1 \to 2$ et $3 \to 4$ sont adiabatiques, ainsi on a :

$$\Delta H_m = W_{u,m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\Delta T = \frac{R}{\beta}\Delta T$$

D'où :

$$\begin{cases} W_{u,\,12,\,m} = \frac{R}{\beta}(T_2 - T_1) \\ W_{u,\,34,\,m} = \frac{R}{\beta}(T_4 - T_3) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} W_{u,\,12,\,m} = \frac{RT_1}{\beta}\left(r_p^\beta - 1\right) = 4,6\,\mathrm{kJ.mol^{-1}} > 0 \\ W_{u,\,34,\,m} = \frac{RT_3}{\beta}\left(r_p^{-\beta} - 1\right) = -12\,\mathrm{kJ.mol^{-1}} < 0 \end{cases}}$$

6. Pour les transformations isobares on a : $\Delta H_m = Q_m = \frac{R}{\beta}\Delta T$. Ainsi :

$$\begin{cases} Q_{23,\,m} = \frac{R}{\beta}(T_3 - T_2) \\ Q_{41,\,m} = \frac{R}{\beta}(T_1 - T_4) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} Q_{23,\,m} = \frac{R}{\beta}\left(T_3 - T_1 r_p^\beta\right) = 16\,\mathrm{kJ.mol^{-1}} > 0 \\ Q_{41,\,m} = \frac{R}{\beta}\left(T_1 - T_3 r_p^{-\beta}\right) = -9,3\,\mathrm{kJ.mol^{-1}} < 0 \end{cases}}$$

7. Le rendement de la machine s'exprime :

$$\boxed{\eta = \left|\frac{W_{u,\,12,\,m} + W_{u,\,34,\,m}}{Q_{23,\,m}}\right|}$$

À partir des relations précédentes, on obtient :

$$\eta = \left| \frac{T_1\left(r_p^{\beta}-1\right)+T_3\left(r_p^{-\beta}-1\right)}{T_3 - T_1 r_p^{\beta}} \right| = \left| \frac{\left(T_3 - T_1 r_p^{\beta}\right) r_p^{-\beta} - \left(T_3 - T_1 r_p^{\beta}\right)}{T_3 - T_1 r_p^{\beta}} \right|$$

D'où :

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{r_p^{\beta}}} = 0,43$$

8. En notant W le travail reçu par le système et Q_C et Q_F les transferts thermiques reçus respectivement de la part de la source chaude et de la source froide :

$$\eta_C = \frac{-W}{Q_C}$$

Le rendement de Carnot est le rendement maximal de la machine, obtenu dans le cas d'un cycle réversible. Les bilans énergétiques et entropiques sur ce cycle donnent alors :

$$\begin{cases} 0 = W + Q_C + Q_F \\ 0 = \frac{Q_C}{T_3} + \frac{Q_F}{T_1} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\eta_C = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_1}{T_3}} = 0,77 > \eta$$

9. Les transformations $x \to 3$ et $y \to 1$ sont isobares, donc :

$$Q_m = \Delta H_m = \frac{R}{\beta}\Delta T$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{cases} Q_{x3,\,m} = \frac{R}{\beta}\left(T_3 - T_4\right) \\ Q_{y1,\,m} = \frac{R}{\beta}\left(T_1 - T_2\right) \end{cases}}$$

10. Le régénérateur fournit $Q_{2x,\,m}$ (la transformation 4y libère de la chaleur qui sert à chauffer le fluide allant de 2 à x). Le seul transfert thermique que l'extérieur doit effectivement fournir est Q_{x3}. Le travail total $W_{u,m} = W_{u,\,12,\,m} + W_{u,\,34,\,m}$ est inchangé, donc le rendement devient :

$$\eta = -\frac{W_{u,m}}{Q_{x3,\,m}} = \frac{\left(1 - r_p^{-\beta}\right)\left(T_3 - T_1 r_p^{\beta}\right)}{T_3 - T_4} = \frac{\left(T_3 - T_1 r_p^{\beta}\right)}{T_3}$$

On obtient l'expression :

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^{\beta}} = 0,60$$

Le rendement a donc bien été augmenté grâce à l'utilisation du régénérateur.

11. — Le rendement avec et sans régénérateur est identique à condition que l'on ait :

$$1 - r_{pe}^{-\beta} = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_{pe}^{\beta} \Rightarrow r_{pe}^{2\beta} = \frac{T_3}{T_1} \Rightarrow \boxed{r_{pe} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{2\beta}}} = 6,3$$

— Dans ces conditions, on réexprime les températures T_2 et T_4 :

$$\boxed{\begin{cases} T_2 = T_1 r_p^{\beta} = T_1\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{1/2} = \left(T_1 T_3\right)^{1/2} \\ T_4 = T_3 r_p^{-\beta} = T_3\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{-1/2} = T_2 \end{cases}}$$

12. Pour atteindre le rendement de Carnot, il faudrait que :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} r_p^{\beta} \to 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Il faudrait donc que le rapport de compression r_p tende vers 1. Il faudrait décomposer le compression en plusieurs compressions de rapport plus faible (compression à plusieurs étages), et faire de même pour la détente.