MÉCANIQUE

I. Modèle de Bohr de l'atome hydrogénoïde

1. a) La charge du proton est Ze, celle de l'électron est $-e$ d'où $\boxed{K = \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}}$. On vérifie bien que la force est attractive.

   b) La force est centrale de centre O (la position du noyau), donc le moment cinétique en O de l'électron, $\overrightarrow{\sigma_M}^\circ$ est constant, donc le mouvement est plan. Dans le plan du mouvement on utilise les coordonnées polaires ce qui donne $\overrightarrow{\sigma_M}^\circ = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_z$. La loi des aires est donc vérifiée : $C = r^2\dot{\theta}$ =constante.
   Cette loi peut s'interpréter géométriquement par le fait que la vitesse aréolaire $\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C$ est constante : pendant des durées égales, le rayon vecteur balaie des aires égales.

   c) La force électrostatique est conservative et dérive de l'énergie potentielle $E_p(r) = -\frac{K}{r}$. Donc l'énergie mécanique est constante et s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad \boxed{E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}}$$

2. a) Comme $K > 0$, $E_{p,\text{eff}}(r)$ admet un minimum absolu en r_0, qui vaut $E_{p,\text{eff}}(r_0) = E_0$. Si le niveau d'énergie est minimal, alors $E_m = E_0$ et $E_c = 0$, donc $\dot{r} = 0$. Donc $r = r_0$ =constante, le mouvement est donc **circulaire**. Comme $C = r^2\dot{\theta}$ =constante, on a $\dot{\theta}$ =constante donc le mouvement est **uniforme**.
   Le rayon vérifie $\frac{\mathrm{d}E_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r}(r_0) = 0$, ce qui donne

$$r_0 = \frac{mC^2}{K}$$

   Il reste à déterminer la constante C. Comme le mouvement est circulaire uniforme, on a $C = r_0 v_0$. Ceci mène à

$$\boxed{r_0 = \frac{K}{mv_0^2} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\, mv_0^2}}$$

   b) On réinjecte la relation précédente dans l'énergie mécanique : $mv_0^2 = \frac{K}{r_0}$. On obtient

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{K}{r_0} = -\frac{K}{2r_0}}$$

3. On a pour un mouvement circulaire $\sigma = mrv$, et $2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{mv}$ d'où $mrv = n\frac{h}{2\pi}$, et donc $\boxed{\sigma = n\hbar}$.

4. On a montré ci-dessus que $r = \frac{mC^2}{K}$, or $C = \frac{\sigma}{m} = n\frac{\hbar}{m}$, ce qui donne

$$r_n = r_1\,\frac{n^2}{Z} \quad \text{avec} \quad \boxed{r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}} \approx \underline{0,5\,10^{-10}\,\text{m}}$$

   On retrouve donc que l'atome d'hydrogène dans son état fondamental a un diamètre de l'ordre de $1\,\mathring{A} = 10^{-10}$ m.

5. D'après la question 2.b) et la précédente, on obtient

$$E_m = -\frac{K}{2r_n} = -\frac{KZ}{2r_1\,n^2} = -R_y\,\frac{Z^2}{n^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{R_y = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}} \approx \underline{13,6\,\text{eV}}$$

   On retrouve notamment le résultat qui permet d'interpréter les spectres de raies de la lumière émise par l'hydrogène.

II. De la Terre à la Lune *(d'après Centrale TSI 2012)*

1. a) $\mathcal{R}_T$: attaché à la Terre, en rotation autour de l'axe des pôles.
   $\mathcal{R}_G$: centré sur le centre de masse de la Terre, avec 3 axes de définis par des étoiles pratiquement fixes.

   b) Un référentiel est galiléen si un système isolé ou pseudo-isolé a un mouvement de translation rectiligne uniforme.

   c) On néglige les phénomènes de marée en supposant $\mathcal{R}_G$ galiléen.

2. a) Le point B a un mouvement circulaire uniforme autour de Tz, de rayon $R_T\cos\lambda$ et vitesse angulaire Ω. Sa vitesse vaut donc $\boxed{v_B = R_T\,\Omega\,\cos\lambda}$.

   b) On obtient $\underline{v_{B_1} = 4{,}1 \times 10^2\,\text{ms}^{-1}}$ et $\underline{v_{B_2} = 4{,}7 \times 10^2\,\text{ms}^{-1}}$.

   c) $\Delta E_c = \frac{1}{2}m\,(v_0^2 - v_B^2)$, donc $\boxed{e = \dfrac{v_{B_2}^2 - v_{B_1}^2}{v_0^2 - v_{B_1}^2}} = \underline{7{,}8 \times 10^{-4}}$. Le choix de la base de Kourou permet de n'économiser que moins de 0,1 % d'énergie au décollage.

3. a) $\boxed{\overrightarrow{F} = -K/r^2\,\vec{u}_r}$ avec $\vec{u}_r = \overrightarrow{TM}/TM$, $r = TM$ et $\boxed{K = \mathcal{G}m_T m}$. Le travail élémentaire s'écrit $\delta W = \overrightarrow{F}.\mathrm{d}\vec{r} = -K\mathrm{d}r/r^2 = -\mathrm{d}Ep$ avec $\boxed{Ep(r) = -K/r}$.

   b) D'après le Théorème du Moment Cinétique (TMC) en T dans $\mathcal{R}_G$ galiléen, $\left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{\sigma}(T)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{TM} \wedge \overrightarrow{F} = \vec{0}$ donc $\vec{\sigma}(T) = \overrightarrow{TM} \wedge m\vec{v}$ est constant. Donc à tout instant $\overrightarrow{TM}$ est orthogonal à $\vec{\sigma}(T)$, donc M est constamment dans le plan orthogonal à $\vec{\sigma}(T)$ passant par T.

   c) Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit selon $\vec{u}_r$: $-m\,v_0^2/r = -K/r^2$. D'où $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}m_T}{R_T}}} = \underline{7{,}9 \times 10^3\,\text{m.s}^{-1}}$.

   d) La période de révolution T_0 vérifie $T_0^2 = (2\pi r/v_0)^2 = 4\pi^2 r^2/v_0^2 = 4\pi^2 r^3/(\mathcal{G}m_T)$, d'où $\boxed{\dfrac{r^3}{T_0^2} = \dfrac{\mathcal{G}m_T}{4\pi^2}}$.
   Dans le cas d'une trajectoire circulaire de demi-grand-axe a, la loi s'écrit $\boxed{\dfrac{a^3}{T_0^2} = \dfrac{\mathcal{G}m_T}{4\pi^2}}$.

   e) On a alors $E_{m0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m}{r} = \frac{\mathcal{G}m_T m}{2r} - \frac{\mathcal{G}m_T}{r}$ d'où $\boxed{E_{m0} = -\dfrac{K}{2r}}$ avec $\boxed{K = \mathcal{G}m_T m}$. Dans le cas d'une trajectoire circulaire de demi-grand-axe a, cette loi s'écrit $\boxed{E_{m0} = -\dfrac{K}{2a}}$.

4. a) Le demi grand-axe vaut $a = d_{TL}/2$, donc $\boxed{E_{m1} = -\dfrac{K}{d_{TL}}}$.

   b) Le système étant conservatif, on a $E_{m1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m}{R_T}$, ce qui mène à $\boxed{v_1 = \sqrt{2\mathcal{G}m_T\,(1/R_T - 1/d_{TL})}} = \underline{1{,}1 \times 10^4\,\text{m.s}^{-1}}$, ce qui est proche de la vitesse de libération. Donc l'ellipse est proche d'une parabole.

   c) Le transfert correspond approximativement à une demi-période de révolution. D'après la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler ci-dessus, on a donc $\boxed{t_1 = T_1/2 = \pi\sqrt{\dfrac{d_{TL}}{8\mathcal{G}m_T}}} = \underline{4,8\,\text{jours}}$.

   d) La Lune ayant une trajectoire approximativement circulaire, sa vitesse angulaire est constante (et positive). On a donc $\boxed{\phi = 2\pi\,\dfrac{t_1}{T_L}} = \underline{1,1\,\text{rad} = 61°}$.

5. a) La fusée doit accéder à une orbite de rayon (demi grand-axe) de l'ordre du rayon lunaire, donc beaucoup plus faible. Donc l'énergie mécanique doit décroître en valeur algébrique ($Em = -K/(2a)$). Donc d'après le théorème de l'énergie mécanique il faut un travail résistant donc un <u>freinage</u>.

b) On réutilise le résultat obtenu pour la Terre (v_0), ce qui donne $\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} m_L}{R_L}}} = \underline{1{,}7 \times 10^3\,\mathrm{m.s^{-1}}}$.

6. a) Comme montré précédemment, $\overrightarrow{\sigma}(T)$ est constant. Par ailleurs en projetant sur la base cylindrique on obtient $\overrightarrow{\sigma}(T) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$. En utilisant le PFD, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{\sigma}(T) - K\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = -\frac{K}{mr^2}\vec{u}_r \wedge mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z - K\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = (K\dot{\theta} - K\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta = \vec{0}$$

Donc $\overrightarrow{L}$ est constant.

b) En projetant on obtient $\overrightarrow{L}\,\vec{u}_r = L\cos\theta = \Big((\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \wedge mC\vec{u}_z\Big)\,.\,\vec{u}_r - K = \frac{mC^2}{r} - K$, d'où $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $\boxed{p = \frac{mC^2}{K}}$ et $\boxed{e = \frac{L}{K}}$. Il s'agit bien d'une conique, de foyer T.