MÉCANIQUE

I. Modèle de Bohr de l'atome hydrogénoïde

On considère un atome d'hydrogène, ou plus généralement un ion formé d'un atome de numéro atomique Z ayant perdu tout ses électrons sauf un. On considère que le noyau est fixe dans le référentiel d'étude, considéré galiléen. Le noyau est localisé au point O. On étudie les trajectoires possibles de l'électron M, de masse m. Il est soumis à l'attraction du noyau sous la forme d'une force

$$\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{où} \quad r = OM \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

1. a) Exprimer K en fonction des données.
   b) Montrer que le mouvement vérifie la loi des aires. On rappellera la signification de cette loi.
   c) En déduire que le problème se ramène à l'étude d'un système conservatif à un degré de liberté r soumis à une énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}$ qu'on exprimera en fonction de la constante des aires C.
2. Dans toute la suite on s'intéresse uniquement aux états d'énergie minimale de l'électron.
   a) Montrer qu'alors son mouvement est circulaire et uniforme. Donner l'expression de son rayon r_0 en fonction de sa vitesse v_0 et des données du problème.
   b) Exprimer l'énergie mécanique en fonction de K et r_0 uniquement.

On admet le principe de De Broglie selon lequel à toute particule peut être associée onde de matière, dont la longueur d'onde est reliée à la quantité de mouvement $p = mv$ par la constante de Planck selon

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Bohr en déduit que si l'électron occupe une orbite de rayon r, alors sa longueur d'onde doit vérifier la *condition de quantification* suivante (interférence constructive de l'électron sur lui-même) :

$$n\lambda = 2\pi r$$

où n est un entier.

3. En déduire que le moment cinétique est *quantifié*, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\sigma = n\hbar \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}\,.$$

4. En déduire que le rayon de l'orbite est lui-même quantifié par la relation

$$r_n = r_1\,\frac{n^2}{Z}$$

   où r_1 est le *rayon de Bohr* de l'atome d'hydrogène dont on donnera l'expression et la valeur numérique.
5. En déduire que l'énergie mécanique de l'électron est quantifiée selon la loi :

$$E_n = -R_y\,\frac{Z^2}{n^2}$$

   où R_y est la constante de Rydberg, que l'on exprimera et dont on donnera la valeur en eV.

Données :
— masse d'un électron : $m = 9,1.10^{-31}$ kg.
— charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C.
— permittivité diélectrique du vide ε_0 : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\,\text{m.F}^{-1}$.
— constante de Planck h : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055.10^{-34}$ J.s.

II. De la Terre à la Lune

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

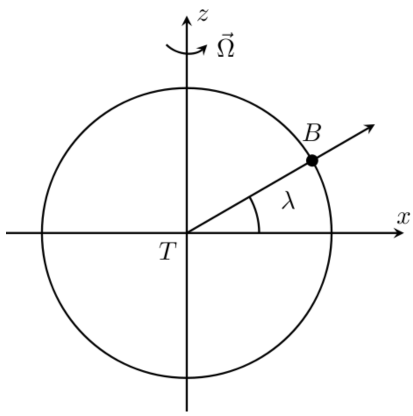
Décollage.

1. Choix du référentiel.
   a) Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$.
   b) Définir un référentiel galiléen.

   Dans toute la suite du problème et sauf indication contraire, $\mathcal{R}_G$ sera le référentiel d'étude, considéré galiléen.

   c) Quel(s) phénomène(s) néglige-t-on en supposant $\mathcal{R}_G$ galiléen ?
2. Influence de la base de lancement.

   La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6{,}4 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (figure ci-contre) autour de l'axe Sud-Nord Tz, à la vitesse angulaire $\Omega = 7,3 \times 10^{-5}$ rad $\cdot$ s^{-1}.



   a) Donner la nature de la trajectoire d'un point B fixe à la surface de la Terre, situé à la latitude λ. Établir l'expression du module v_B de sa vitesse en fonction des données du problème.
   b) Application Numérique : Calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 29$ °) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5$ °).

   Une fusée est assimilée au point matériel M de masse m. Elle décolle du point B, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à $\mathcal{R}_G$.

   c) Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B, v_0 et m. En déduire l'économie relative réalisée, définie par $e = \frac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral. A.N. avec $v_0 = 8,0$ km.s^{-1}. Commenter.

Orbite initiale (orbite 0).

3. La Terre est approximativement une boule à symétrie sphérique de centre T, de masse totale m_T. La fusée est en orbite autour de la Terre à la distance r du centre T de la Terre. On donne $\mathcal{G}.m_T = 4,0 \times 10^{14}$ m$^3 \cdot$ s^{-2} où $\mathcal{G}$ désigne la constante de gravitation universelle.
   a) Donner l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la Terre sur la fusée. Montrer que cette force est conservative et démontrer alors l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ associée, en la choisissant nulle pour $r \to \infty$.
   b) Montrer que la trajectoire de la fusée est plane.

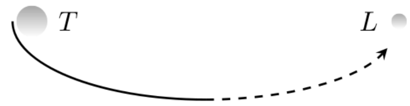
   La trajectoire est maintenant considérée circulaire de rayon r.

   c) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, exprimer la vitesse v_0 de la fusée. Application Numérique : calculer v_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$).
   d) Démontrer la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler.
   Comment se généralise cette loi aux orbites elliptiques ? (sans démonstration)
   e) Démontrer que l'énergie mécanique de la fusée vérifie $E_{m0} = -\dfrac{K}{2r}$, en explicitant K.
   Comment se généralise ce résultat aux orbites elliptiques ? (sans démonstration)

Objectif Lune : orbite de transfert (orbite 1).

4. La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune.

   Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8$ m représente la distance Terre-Lune (figure ci-contre).



Orbite de transfert

   a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire, en fonction notamment de d_{TL}.
   b) En déduire l'expression de la vitesse v_1. Application numérique.
   c) Evaluer la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours d'une demi ellipse). A.N. en jours solaires.
   d) En admettant que la période de révolution de la Lune est de $T_L = 28$ jours, quel doit être l'angle $\phi = \left(\widehat{\overrightarrow{TL}(0), \overrightarrow{TL}(t_1)}\right)$ formé par le vecteur position de la Lune $\overrightarrow{TL}$ entre l'instant de l'allumage des moteurs et le moment de l'arrivée de la fusée "sur la Lune" ? On prendra soin de faire un schéma explicatif.

Orbite lunaire (orbite 2).

5. Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable. *L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.* À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.
   a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier précisément.
   b) Déterminer l'expression puis la valeur numérique de v_2, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune. On prendra $\mathcal{G}.m_L = 4,9 \times 10^{12}$ m$^3 \cdot$ s^{-2} et $R_L = 1{,}7 \times 10^3$ km.

Question "subsidiaire" : trajectoires coniques.

6. On souhaite retrouver que la trajectoire de la fusée soumise à l'attraction terrestre est une conique d'excentricité e et de paramètre p.
   Pour cela on définit le *vecteur de Laplace* $\overrightarrow{L} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{\sigma}(T) - K\,\vec{u}_r$, où $\vec{v}$ est la vitesse de M à un instant quelconque, $\overrightarrow{\sigma}(T)$ est son moment cinétique en T, et K est la constante intervenant dans la question 3.e)) précédente. On utilise les coordonnées polaires (r, θ) centrées sur T.
   a) En le dérivant dans le référentiel d'étude ($\mathcal{R}_G$), montrer que $\overrightarrow{L}$ est une constante du mouvement.
   b) On choisi maintenant par convention l'origine des angles θ dans la direction indiquée par $\overrightarrow{L}$ (qui définit donc l'axe Tx). On introduit la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$ (dont on ne demande pas de montrer qu'elle est constante).
   En projetant $\overrightarrow{L}$ selon $\vec{u}_r$, montrer que la trajectoire est une conique de foyer T, dont on exprimera le paramètre p et l'excentricité e en fonction des constantes m, C, K et $L = ||\overrightarrow{L}||$.