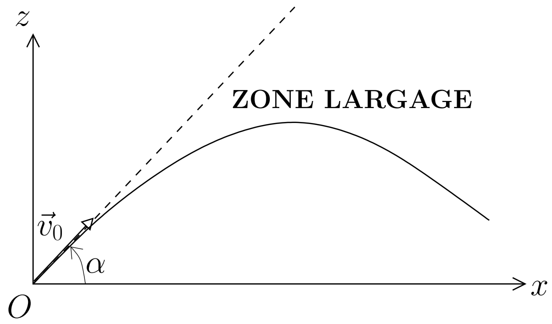
MÉCANIQUE

I. Interception d'une fusée balistique

1. Modélisation sans frottement de l'air

1. (cf Cours...) Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliqué dans $\mathcal{R}$ galiléen donne pour le système M : $\vec{a} = \vec{g}$. En intégrant deux fois et en introduisant les conditions initiales, on obtient $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t$. Après projection cela donne : $\boxed{x = v_0\,\cos\alpha\,t}$, $\boxed{y = 0}$ et $\boxed{z = -\dfrac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,\sin\alpha\,t}$.
2. On élimine la variable temps : $t = x/(v_0\,\cos\alpha)$, ce qui mène à $\boxed{z = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + \tan\alpha\,x}$.
3. La portée vérifie $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,P^2 + \tan\alpha\,P = 0$ d'où $\boxed{P = \dfrac{2v_0^2}{g}\,\sin\alpha\cos\alpha}$.
   On cherche la hauteur maximale en dérivant la trajectoire : $-\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\,x_{\max} + \tan\alpha = 0$ d'où $x_{\max} = P/2$ et $\boxed{h_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g}\,\sin^2\alpha}$. Ce résultat aurait pu être obtenu avec le théorème de l'énergie cinétique.
4. La fonction $f(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\,\sin(2\alpha)$ est maximale en $\alpha = \pi/4$ et vaut alors $\frac{1}{2}$. D'où $\boxed{P_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}}$.
5. De même que pour la fusée, le PFD appliqué à N conduit à $\vec{a}\,' = \vec{g}$. Une première intégration donne $\vec{v}\,' = \vec{g}\,(t - t_1)$. Puis une seconde donne $\vec{r}\,' = \frac{1}{2}\vec{g}\,(t - t_1)^2 + \overrightarrow{ON_0}$. On en déduit après projection $\boxed{x = x_0}$, $\boxed{y = 0}$ et $\boxed{z = -\dfrac{1}{2}g\,(t - t_1)^2 + z_0}$.
6. L'interception impose $\vec{r}(T) = \vec{r}\,'(T)$, donc en projettant :
   $$v_0\,\cos\alpha\,T = x_0 \qquad (1)$$
   $$-\frac{1}{2}g\,T^2 + v_0\,\sin\alpha\,T = -\frac{1}{2}g\,(T - t_1)^2 + z_0 \iff (v_0\,\sin\alpha - gt_1)\,T = z_0 - \frac{1}{2}g\,t_1^2 \qquad (2)$$
   L'Eq. (1) impose la date de l'interception : $\boxed{T = \dfrac{x_0}{v_0\,\cos\alpha}}$.
7. L'Eq. (2) contraint la date t_1 via $t_1^2 - 2T\,t_1 + 2\,(v_0\sin\alpha T - z_0)/g = 0$, c'est-à-dire en remplaçant T : $\boxed{t_1^2 - \dfrac{2x_0}{v_0\,\cos\alpha}\,t_1 + 2\,\dfrac{x_0\tan\alpha - z_0}{g} = 0}$.
8. On cherche une solution réelle, donc le discriminent réduit doit être positif $\Delta' = \frac{x_0^2}{v_0^2\cos^2\alpha} - 2\,\frac{x_0\tan\alpha - z_0}{g} > 0$. Ceci implique $\boxed{z_0 \geq -\dfrac{g\,x_0^2}{2\,v_0^2\,\cos^2\alpha} + x_0\,\tan\alpha} = p(x_0)$, c'est-à-dire que le point N_0 se situe au dessus de la parabole d'équation $z = p(x)$, qui n'est autre que la trajectoire de la fusée ! On aurait pu le deviner sans calcul...
9. On a $t_1 = \frac{x_0}{v_0\,\cos\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\,\frac{v_0^2\,\cos^2\alpha\,(x_0\tan\alpha - z_0)}{g\,x_0^2}}\right)$. On cherche une racine à la fois positive (logiquement l'obus est émis après le lancement de la fusée...), mais aussi inférieure à T (l'obus est émis avant l'interception...). Ceci impose $\boxed{t_1 = T\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2}{gT^2}\,(x_0\tan\alpha - z_0)}\right)}$ et $\boxed{x_0\tan\alpha - z_0 \geq 0}$. La dernière condition impose donc que l'obus soit lâché suffisamment près de la trajectoire, précisément en dessous de la droite d'équation $z_0 = \tan\alpha\,x_0$.



10. D'après la question 6., on a $T = x_0/v_{0x}$. On calcule la différentielle logarithmique $\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{d}x_0}{x_0} - \frac{\mathrm{d}v_{0x}}{v_{0x}}$ pour connaître la propagation des erreurs : $\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta x_0}{x_0} - \frac{\delta v_{0x}}{v_{0x}}$. En admettant que ces erreurs (relatives) sont indépendantes, on obtient l'incertitude relative en sommant les variances :
    $$\boxed{\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{0x}}{v_{0x}}\right)^2}} = \sqrt{10^{-8} + 10^{-6}} \approx \underline{0,1\,\%}$$

2. Prise en compte des frottements de l'air

11. Il y a une seule dimension mais plusieurs unités possibles. $[\lambda] = \mathrm{M.T^{-1}}$ donc λ est par exemple en $\underline{\mathrm{kg.s^{-1}}}$. $[k] = \mathrm{M.L^{-1}}$ donc k est par exemple en $\underline{\mathrm{kg.m^{-1}}}$.
12. (cf Cours...) Le PFD pour M dans $\mathcal{R}$ s'écrit maintenant $\vec{a} + \frac{1}{\tau}\,\vec{v} = \vec{g}$, avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$. La solution de cette équation est la somme d'une solution générale exponentielle et d'une solution particulière constante. Après introduction des conditions initiales on obtient : $\vec{v} = (\vec{v}_0 - \tau\vec{g})\,e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau\vec{g}$. En intégrant de nouveau on obtient $\vec{r} = \tau(\vec{v}_0 - \tau\vec{g})\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \tau\vec{g}\,t$. D'où en projettant : $\boxed{x = \tau v_0\cos\alpha\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$, et $\boxed{z = \tau(v_0\sin\alpha + \tau g)\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - \tau g\,t}$.
13. Le mouvement selon x permet de nouveau de conclure : $x(T') = x_0$ car l'obus évolue toujours à $x' = x_0 =$ constante. D'où $\boxed{T' = -\tau\,\ln\left(1 - \dfrac{x_0}{\tau v_0\cos\alpha}\right)}$.
14. Le mouvement de l'obus est monodimensionnel selon z. Le PFD projeté s'écrit pour la norme de la vitesse v' : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m'}v'^2}$. On retrouve bien que la force de frottement tend à réduire la vitesse.
    En cherchant une solution constante on trouve $\boxed{v'_\ell = \sqrt{\dfrac{m'g}{k}}}$.
15. On sépare les variables en faisant apparaître une différentielle en v' à gauche, et une différentielle en t à droite : $\frac{\mathrm{d}v'}{g - \frac{k}{m}v'^2} = \mathrm{d}t$. On change de variable en posant $\boxed{u = \sqrt{\dfrac{k}{m'g}}\,v' = \dfrac{v'}{v'_\ell}}$ pour faire apparaître la fonction proposée :
    $$\frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)} + \frac{\mathrm{d}u}{2(1-u)} = \frac{\mathrm{d}t}{\tau'} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau' = \sqrt{\frac{m'}{kg}} = \frac{v'_\ell}{g}}$$
16. On intègre entre t_1 et t le membre de droite, et entre $u_0 = \frac{v'_0}{v'_\ell}$ et u celui de gauche, ce qui fait apparaître des fonctions ln :
    $$\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+u}{1+u_0}\right) - \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1-u}{1-u_0}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{(1+u)(1-u_0)}{(1-u)(1+u_0)}}\right) = \frac{t - t_1}{\tau'}$$

On inverse alors cette relation : $\frac{(1+u)(1-u_0)}{(1-u)(1+u_0)} = e^{\frac{2t}{\tau'}} \Longleftrightarrow \frac{1+u}{1-u} = f(t)$ avec $f(t) = \frac{1+u_0}{1-u_0}\, e^{\frac{2(t-t_1)}{\tau'}}$.
On en déduit

$$\boxed{v'(t) = v'_\ell\, \frac{f(t)-1}{f(t)+1} \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{v'_\ell + v_0}{v'_\ell - v_0}\, e^{\frac{2(t-t_1)}{\tau'}}}$$

17. L'équation s'écrit $z(T') = z'(T')$. Or T' et donc $z(T')$ sont connus explicitement en fonction des données du problème, qui se résument à $\vec{v}_0$ et N_0, $\vec{g}$, τ, et τ'. Donc en posant $X = e^{\frac{T-t_1}{\tau'}}$, elle s'écrit

$$z(T') - z_0 = \tau'\, v'_\ell\, \ln\left[\frac{X + q/X}{1+q}\right].$$

Après inversion cette équation devient un trinôme du second degré en X. Donc on peut écrire de nouveau au maximum 2 solutions littérales pour t_1, à la condition que X soit réel et positif. Comme pour le cas sans frottement, cela contraint le lieu géographique des positions N_0.

II. Descente d'une bille sur une hélice

1. a) Le vecteur $\vec{u}_t$ est le vecteur directeur du vecteur vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z = \dot{z}\,(\vec{u}_\theta + \vec{u}_z)$. Donc $\vec{u}_t = (\vec{u}_\theta + \vec{u}_z)/||\vec{u}_\theta + \vec{u}_z||$, d'où $\boxed{\vec{u}_t = (\vec{u}_\theta + \vec{u}_z)/\sqrt{2}}$. De plus $\cos\alpha = \vec{u}_\theta.\vec{u}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\boxed{\alpha = \pi/4}$.

   b) On obtient : $\vec{u}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{u}_r \wedge (\vec{u}_\theta + \vec{u}_z)$, donc $\boxed{\vec{u}_n = (-\vec{u}_\theta + \vec{u}_z)/\sqrt{2}}$.

2. On obtient $\boxed{\vec{a} = -\dot{z}^2/R\,\vec{u}_r + \ddot{z}\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z}$.

3. Le PFD dans $\mathcal{R}$ s'écrit $\vec{a} = \frac{1}{m}\,\vec{N} + \frac{1}{m}\,\vec{T} + \vec{g}$. On note $\vec{N} = N_r\,\vec{u}_r + N_n\,\vec{u}_n$, et $\vec{T} = T\,\vec{u}_t$ avec $T > 0$ car le mobile descend. En utilisant que $\vec{u}_t.\vec{u}_r = \vec{u}_n.\vec{u}_r = 0$, $\vec{u}_t.\vec{u}_\theta = \vec{u}_t.\vec{u}_z = 1/\sqrt{2}$ et $\vec{u}_n.\vec{u}_\theta = -\vec{u}_n.\vec{u}_z = -1/\sqrt{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &: \quad -\dot{z}^2/R &= N_r/m \qquad (3)\\ \vec{u}_t &: \quad \sqrt{2}\ddot{z} &= T/m - g/\sqrt{2} \qquad (4)\\ \vec{u}_n &: \quad 0 &= N_n/m - g/\sqrt{2} \qquad (5) \end{aligned}$$

   L'Eq. (5) rappelle que le mouvement est tangent à l'hélice, qui n'est pas courbée selon la direction de $\vec{u}_n$.

4. En l'absence de frottements, $T = 0$ et donc l'Eq. (4) mène à $\boxed{\ddot{z} = -g/2}$. Les conditions initiales conduisent à $\boxed{z = -\frac{1}{4}gt^2}$.
   Remarque : Tout se passe comme si le champ de pesanteur était divisé par 2, à cause de la pente verticale de l'hélice. La loi horaire est la même que si l'hélice était dépliée sur un plan vertical (on obtiendrait un mouvement rectiligne incliné de $\pi/4$ par rapport à l'horizontale.

5. En exploitant les Eqs. (3) et (5), on obtient $\boxed{N_r = -\frac{mg^2}{4R}t^2}$ et $\boxed{N_n = \frac{mg}{\sqrt{2}}}$.
   Remarque : A la différence du mouvement rectiligne précédent, il y a nécessairement une réaction radiale N_r pour maintenir le mobile en rotation autour de l'axe Oz sur l'hélice.

6. Le système étant conservatif en l'absence de frottements ($\vec{N}$ ne travaille jamais et le poids est conservatif), l'énergie mécanique est constante. Elle vaut $E_m = E_c + E_p = m\dot{z}^2 + mgz$. On dérive cette équation par rapport au temps, puis on simplifie par $\dot{z}$, ce qui donne $2m\ddot{z} + mg = 0$. On retrouve donc la même équation.

7. Lors du glissement, la loi de Coulomb s'écrit $T = f\,\sqrt{N_r^2 + N_n^2}$. En injectant les Eqs. (3) et (5) dans l'Eq. (4), on obtient $\ddot{z} = f\,\sqrt{(N_r^2 + N_n^2)/(2m^2)} - g/2$, d'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\ddot{z} = \frac{fg}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{g^2R^2}\,\dot{z}^4} - \frac{g}{2}}$$

8. La condition de mise en mouvement à l'instant initial correspond à $\dot{z} = 0$ et $\ddot{z} < 0$, donc $f\,g/2 - g/2 < 0$, donc $\boxed{f < 1}$.

9. Si elle existe, la vitesse limite vérifie $\ddot{z} = 0$, donc

$$\boxed{\dot{z}_{\lim} = \sqrt{gR}\,\left(\frac{1-f^2}{2f^2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$