MÉCANIQUE

I. Interception d'une fusée balistique

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m, est mise à feu à l'instant $t = 0$ depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec le plan horizontal Oxy. La fusée se déplace uniquement dans le plan vertical Oxz. Le référentiel $\mathcal{R}$ est considéré galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On note $g = -g\,\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur, et $\vec{r} = (x, y, z)$ le vecteur position de M.

1. Modélisation sans frottement de l'air

1. Déterminer les lois horaires du mouvement du point M en fonction des constantes du problème.
2. En déduire l'équation de la trajectoire du point M sous la forme $z = f(x)$.
3. En déduire la portée P et l'altitude maximale h_{max} atteintes par la fusée. On définit la portée à partir de l'altitude initiale du tir : $z = 0$.
4. Pour quelle valeur de α la portée P est-elle maximale ? Que vaut la portée maximale P_{max} ?

On désire maintenant intercepter la fusée pendant le vol. Pour cela, on lâche sans vitesse initiale, à l'instant t_1 positif, un obus au point N_0 coordonnées (x_0, z_0). Cet obus sera assimilé à un point matériel N de masse m', de vecteur position $\vec{r}\,' = (x', y', z')$. On cherche à déterminer la date t_1 du lâcher et celle de l'interception T en fonction de la position N_0 supposée connue.

5. Déterminer les lois horaires du mouvement de l'obus.
6. En déduire à quel instant T s'effectue l'interception.
7. En déduire une équation du second degré en t_1 résultant de l'intersection des 2 trajectoires. On l'écrira en fonction des données du problème.
8. À quelle condition existe-t-il une solution à cette équation ? Où doit se situer le point N_0 d'après cette condition ?
9. Déterminer à quel instant t_1 l'obus doit être lâché afin de réussir l'interception. On exprimera le résultat en fonction de T et autres données du problème.
   Montrer que la position de N_0 doit vérifier une seconde condition. Laquelle et pourquoi ? Faire un schéma récapitulant la zone de largage possible de l'obus.
10. On suppose que la position initiale (x_0, z_0) de l'obus par rapport à celle de la fusée est connue avec une précision relative de $0,01\%$ près. Quant aux composantes de la vitesse $\vec{v}_0$, elles sont connues à $0,1\%$ près. En déduire l'incertitude relative sur la date T. Faire l'application numérique.

2. Prise en compte des frottements de l'air

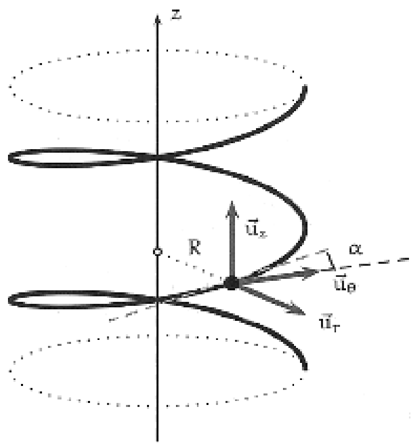
En fait, il est nécessaire de prendre en compte les frottements dus à l'air sur la fusée et l'obus. On considère que la fusée est suffisamment bien profilée pour qu'un modèle de force de frottement fluide linéaire soit convenable : l'air exerce donc une force $-\lambda\vec{v}$ sur la fusée, avec $\lambda > 0$ le coefficient de frottement. Par ailleurs, l'obus étant moins bien profilé, on le lâche toujours verticalement mais avec un vitesse initiale $\vec{v}_0\,' = -v_0'\,\vec{u}_z$ $(v_0' > 0)$, et on modélise les frottements de l'air par une force fluide quadratique : $-k\,v'\,\vec{v}\,'$, où $\vec{v}\,' = -v'\,\vec{u}_z$ est la vitesse de l'obus $(v' > 0)$ et $k > 0$ le coefficient de frottement.

11. Donner la dimension puis l'unité des coefficients λ et k.
12. Etablir la loi horaire du mouvement de la fusée. On introduira le temps caractéristique $\tau = \frac{m}{\lambda}$.
13. Déterminer la nouvelle expression de la date T' de l'interception.

14. Etablir l'équation différentielle vérifiée par v' pour l'obus. Montrer que ce mouvement admet une vitesse limite v'_ℓ qu'on exprimera en fonction des constantes du problème.
15. Pour intégrer cette équation et en déduire l'expression de $v'(t)$, on utilise la **méthode de séparation des variables**. Montrer que le PFD conduit à l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{\mathrm{d}t}{\tau'}$$
où u est une variable sans dimension à déterminer, et τ' un temps caractéristique à exprimer en fonction des constantes du problème.
16. Intégrer cette équation en utilisant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle du type
$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2(1-u)}$$
En déduire l'expression de $v'(t)$.
17. En intégrant de nouveau, on trouve l'altitude de l'obus
$$z'(t) = z_0 + \tau'\, v'_\ell \ln\left[\frac{e^{\frac{t-t_1}{\tau'}} + q e^{-\frac{t-t_1}{\tau'}}}{1+q}\right] \quad \text{avec} \quad q = \frac{v'_\ell - v_0}{v'_\ell + v_0}\,.$$
Peut-on résoudre analytiquement l'équation qui permet de trouver t_1 ? Expliquez brièvement.

II. Descente d'une bille sur une hélice

Un point matériel M de masse m se déplace sur une hélice d'équation $(r = R, \theta = \frac{z}{R})$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z), avec $R > 0$. L'axe (O_z) est vertical ascendant (figure ci-contre).
On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire supposé galiléen. Le point M est abandonné sans vitesse initiale depuis le point M_0 tel que $(z = 0, \theta = 0)$, et soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$.



1. a) Exprimer le vecteur vitesse dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, uniquement en fonction de la coordonnées $z(t)$.
   En déduire l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire et orienté vers le haut, dans la base cylindrique.
   Quel angle α l'hélice fait-elle avec le plan horizontal ?
   b) On définit le vecteur unitaire $\vec{u}_n$ orthogonal à la trajectoire par $\vec{u}_n = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_t$. Calculer $\vec{u}_n$ dans la base cylindrique.

Dans la suite, on écrira la réaction de l'hélice sous la forme $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$, que l'on décomposera dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$.

2. Calculer le vecteur accélération dans la base cylindrique. On l'exprimera uniquement en fonction de la coordonnée $z(t)$.
3. Projeter le principe fondamental de la dynamique dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$.

Dans un premier temps, on considère que la bille glisse **sans frottement** le long de l'hélice.

4. Etablir l'équation du mouvement pour la coordonnée $z(t)$. La résoudre.
5. En déduire les composantes de la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ en fonction du temps.
6. Par une approche énergétique, retrouver l'équation du mouvement.

On considère maintenant l'effet d'une force de **frottement solide**, qui est supposée vérifier la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement f.

7. Etablir l'équation du mouvement.
8. Déterminer la condition sur f pour que le mobile démarre.
9. Montrer qu'il existe un vitesse limite de chute, et l'exprimer en fonction des données.